CSAI 数学基础 2 试题回忆

2023 级

一、填空

1. 矩阵 f 范数，无穷范数，条件数.

2. 压缩映射: 常数( )与不等式关系( )对任意 x,y 在定义域 D 上成立，则称函数 f 为压缩系数为 q 的压缩映射.

3. 适定性问题满足的三个条件.

9. 平方逼近一致收敛的定义.

10. 求解 e^x 的最佳平方逼近多项式，空间是$span\{1, x\}$.

11. 在离散点集$\{x_i\}(i = 1, \ldots\ldots, m)$上定义内积，权系数为$\{w_i\}$，对 f,g 满足怎样的条件则称 f,g 在该离散点集上带权$\{w_i\}$正交

12. 若相对误差为 0.05%，则至少有几位有效数字

（4~8 由于时间过于久远，消失了）

二、计算

1. 方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 1.5 附近有根，给出了两种迭代方式:

（1）$x[k+1] = (x[k]+1)^{\frac{1}{3}}$

（2）$x[k+1] = x[k]^3 - 1$

问以上两种迭代是否收敛，若收敛则求出解，精确到 0.001

2. 函数$f(x) =- e^{(-x^3+x)}$ 区间$[0.35, 0.75]$，用黄金分割法求极小值。求迭代两次后的区间，并以区间中点作为最终结果。

3. 两点弦截法，$3x^3+2x^2+5x-6=0$ 区间为$[0,2]$，证明充分条件并在初值 1.5 和 2 的条件下计算 x，精度为10^{-3}

4. 埃尔米特插值法，三个点$(1,2),(2,4),(3,12)$和第一边界条件$f'(1)=1$，$f'(3)=-1$

5. 用切比雪夫多项式，求$f=2x^3+5x^2+7$在$[0,1]$上的二次最佳逼近函数

6. 高斯-赛德的矩阵表示，使用谱半径判断收敛速度，以及收敛速度，最后求开始两次迭代的结果向量 x。

三、证明

（1）f_i是凸集 D 上凸函数，证明$3f_1+4f_2+5f_3$是凸函数

（2）证明矩阵谱半径小于其任意范数

（3）$\frac{1}{n}||A||_\infty \le ||A||_2 \le n||A||_\infty$