数学方法下试卷2023

一、填空题（每空 1.5 分，共 $1.5\times 20=30$ 分）

1. 已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，则 $\|\mathbf{A}\|_2=$ ______，$\|\mathbf{A}\|_\infty=$ ______，$\mathrm{cond}_1(\mathbf{A})=$ ______
2. 近似数 $\bar{x}=0.019870$ 有_____位有效数字，绝对误差限为_____，相对误差限为_____
3. $f(x)=0$ 的牛顿迭代法的公式为_____，利用牛顿迭代法求解方程 $x^2-2x+1=0$，那么其收敛阶为_____
4. 对任意初始向量 $x^{(0)}$，由 $x^{k+1}=Bx^k+f$ 可求得向量序列 $\left\{x^{(k)}\right\}_0^\infty$，若_______，则 x^* 是方程的解。
5. 设 $Ax=b$，则高斯-赛德尔迭代法（Gauss-Seidel)迭代公式的矩阵形式为_______。
6. 适定问题需要满足_______、_______和_______三个条件。
7. 设有 n 阶方程组 $x=Bx+f$，$\rho(B)$ 为 B 的谱半径，称 $R(B)=$ _____为迭代法的收敛速度。
8. 最优化问题 $\min f(x), s.t. x\in D$，满足_____称为可行解。
9. 设 $f(x),g(x)\in[a,b]$，$\rho(x)$ 为 $[a,b]$ 内的权函数，若函数的内积_______，则称 $f(x),g(x)$ 是在 $[a,b]$ 内带权 $\rho(x)$ 的正交。
10. 记 $p_n=\{\text{次数不超过}n\text{的多项式的全体}\}$，设 $f(x)\in C[a,b],p(x)\in P_n$，记_______，称 μ 为 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差。
11. 设 $f(x)\in C[a,b]$，$\rho(x)$ 为定义域内的权函数，若存在 $S^*(x)\in\Phi$ 使_______，则称 $S^*(x)$ 是集合 Φ 中带权 $\rho(x)$ 的最佳平方逼近函数。
12. 设函数 $f(x)$ 在凸集 D 上有定义，如果对任意 $x,y\in D,x\neq y$ 和任意 $\lambda\in(0,1)$，有_______，则称是凸集 D 上的严格凸函数。
13. 若 $x^*\in D$，对一切 $x\in D'\,(x\neq x^*)$ 恒有_______，则称 x^* 为最优化问题 $\min f(x), s.t. x\in D$ 的严格整体最优解。

二、计算题（第 1,2 小题各 7 分，第 3，4，5，6 小题各 8 分，共计 46 分；需写出计算过程）

1. 利用两点弦截法求 $x^3-3x-5=0$ 在 $x\in[2,3]$ 的根，初值为 2.5 和 3，求解方式类似于牛顿迭代法，需给出迭代法收敛的充分条件，精确度 10^{-3}。
2. 设方程组 $\begin{cases}3x_1-x_2=3\\x_1-2x_2=-4\end{cases}$

1. 写出求解上述方程组的雅可比（Jacobi）迭代法的迭代公式。
2. 讨论雅可比迭代法解此方程组的收敛性。

3. 已知：

x	2	4	6	8
f（x）	5	9	11	15

试用牛顿插值公式二次插值求解 $f(4.5)$（需构造差商表）。

4. 给定以下数据：

x_k	1	2
f（x_k）	3	4
f'（x_k）	0	1

试用基函数法构造埃尔米特插值多项式 $H_3(x)$ 并计算 $f(1.5)$。

5. 已知切比雪夫多项式的递推公式为 $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$，$T_0(x)=1,T_1(x)=x$，求 $f(x)=2x^3+16x^2+2$ 在区间 $[0,1]$ 内的 2 次最佳一致逼近多项式。
6. 用黄金分割法求函数 $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ 在区间 $[0,3]$ 的最小值，此时 x 取值是多少，最后 x 误差小于 1。

三、证明题（第 1,2 小题各 7 分，的第 3 小题 10 分，共计 24 分）

1. 证明对于任意 n阶方阵$A $\in \mathbf{R}^{n\times n}$，利用定义直接证明 $\frac{1}{n}\|\mathbf{A}\|_\infty\le\|\mathbf{A}\|_1\le n\|\mathbf{A}\|_\infty$。
2. 设 $x=Bx+f$，式中 $B=\begin{pmatrix}0.8&0\\0.6&0.9\end{pmatrix}$，$f=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，试证明虽然 $\|B\|>1$，但迭代公式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 是收敛的。
3. 证明：

1. 两个凸集的和 $D_1 + D_2 = \{x + y \mid x \in D_1, y \in D_2\}$ 是凸集。
2. 通过定义证明函数 $f(x) = e^x$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的凸函数。