第 4 章　不定积分

内容概要

<table>
<tr><th>名称</th><th colspan="3">主要内容</th></tr>
<tr><td rowspan="7">不定积分</td><td>不定积分的概念</td><td colspan="2">设 $f(x)$， $x\in I$，若存在函数 $F(x)$，使得对任意 $x\in I$ 均有 $F'(x)=f(x)$
或 $dF(x)=f(x)dx$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数。
$f(x)$ 的全部原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记为
$\int f(x)dx=F(x)+C$
注：（1）若 $f(x)$ 连续，则必可积；（2）若 $F(x),G(x)$ 均为 $f(x)$ 的原函数，则
$F(x)=G(x)+C$。故不定积分的表达式不唯一。</td></tr>
<tr><td>性质</td><td colspan="2">性质 1：$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$ 或 $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$；
性质 2：$\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$；
性质 3：$\int[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx\pm\beta\int g(x)dx$，$\alpha,\beta$ 为非零常数。</td></tr>
<tr><td rowspan="4">计算方法</td><td>第一换元积分法（凑微分法）</td><td>设 $f(u)$ 的 原函数为 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式：
$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d\varphi(x)=F(\varphi(x))+C$</td></tr>
<tr><td>第二类换元积分法</td><td>设 $x=\varphi(t)$ 单调、可导且导数不为零，$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 有原函数 $F(t)$，
则 $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C$</td></tr>
<tr><td>分部积分法</td><td>$\int u(x)v'(x)dx=\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$</td></tr>
<tr><td>有理函数积分</td><td>若有理函数为假分式，则先将其变为多项式和真分式的和；对真分式的处理按情况确定。</td></tr>
<tr><td>本章的地位与作用</td><td colspan="3">在下一章定积分中由微积分基本公式可知---求定积分的问题，实质上是求被积函数的原函数问题；后继课程无论是二重积分、三重积分、曲线积分还是曲面积分，最终的解决都归结为对定积分的求解；而求解微分方程更是直接归结为求不定积分。从这种意义上讲，不定积分在整个积分学理论中起到了根基的作用，积分的问题会不会求解及求解的快慢程度，几乎完全取决于对这一章掌握的好坏。这一点随着学习的深入，同学们会慢慢体会到！</td></tr>
</table>

课后习题全解

习题 4-1

1.求下列不定积分：

知识点： 直接积分法的练习——求不定积分的基本方法。

思路分析：利用不定积分的运算性质和基本积分公式，直接求出不定积分！

★(1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$

思路： 被积函数 $\frac{1}{x^2\sqrt{x}} = x^{-\frac{5}{2}}$，由积分表中的公式（2）可解。

解： $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{5}{2}}dx = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$

★(2) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

思路:根据不定积分的线性性质，将被积函数分为两项，分别积分。

解： $\int (\sqrt[3]{\mathrm{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int (x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{2}})dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$

★(3) $\int (2^x + x^2)dx$

思路:根据不定积分的线性性质，将被积函数分为两项，分别积分。

解： $\int (2^x + x^2)dx = \int 2^x\,dx + \int x^2dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{3}x^3 + C$

★(4) $\int \sqrt{x}(x-3)dx$

思路:根据不定积分的线性性质，将被积函数分为两项，分别积分。

解： $\int \sqrt{\mathrm{x}}(x-3)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + C$

★★(5) $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1}dx$

思路:观察到 $\frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} = 3x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}$ 后，根据不定积分的线性性质，将被积函数分项，分别积分。

解：$\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx = \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx = x^3 + \arctan x + C$

★★(6) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

思路:注意到 $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$，根据不定积分的线性性质，将被积函数分项，分别积分。

解：$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan x + C.$

注：容易看出(5)(6)两题的解题思路是一致的。一般地，如果被积函数为一个有理的假分式，通常先将其分解为一个整式加上或减去一个真分式的形式，再分项积分。

★(7) $\int (\frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4})dx$

思路:分项积分。

解：$\int (\frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4})dx = \frac{1}{2}\int xdx - \int \frac{1}{x}dx + 3\int x^{-3}dx - 4\int x^{-4}dx$

$= \frac{1}{4}x^2 - \ln|x| - \frac{3}{2}x^{-2} + \frac{4}{3}x^{-3} + C.$

★(8) $\int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx$

思路:分项积分。

解：$\int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\arctan x - 2\arcsin x + C.$

★★(9) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$

思路:$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ =**?** 看到 $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}$，直接积分。

解：$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}}dx = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C.$

★★(10) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

思路:裂项分项积分。

解：$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$

★(11) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx$

解：$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx = \int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}dx = \int (e^x+1)dx = e^x + x + C.$

★★(12) $\int 3^x e^x dx$

思路:初中数学中有同底数幂的乘法： 指数不变，底数相乘。显然 $3^x e^x = (3e)^x$ 。

解：$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C.$

★★(13) $\int \cot^2 x dx$

思路:应用三角恒等式"$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$"。

解：$\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1)dx = -\cot x - x + C$

★★(14) $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}dx$

思路:被积函数 $\frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x} = 2 - 5(\frac{2}{3})^x$，积分没困难。

解：$\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}dx = \int (2 - 5(\frac{2}{3})^x)dx = 2x - 5\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln 2 - \ln 3} + C.$

★★(15) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

思路:若被积函数为弦函数的偶次方时，一般地先降幂，再积分。

解：$\int \cos^2 \frac{x}{2} d = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$

★★(16) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$

思路:应用弦函数的升降幂公式，先升幂再积分。

解：$\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$

★(17) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

思路:不难，关键知道“$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$”。

解：$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C.$

★(18) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$

思路:同上题方法，应用“$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$”，分项积分。

解：$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} x$

$= \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx = -\cot x - \tan x + C.$

★★(19) $\int (\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) dx$

思路:注意到被积函数 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$，应用公式(5)即可。

解：$\int (\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\arcsin x + C.$

★★(20) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

思路:注意到被积函数 $\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} = \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\sec^2 x + \frac{1}{2}$，则积分易得。

解：$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx + \frac{1}{2}\int dx = \frac{\tan x + x}{2} + C.$

★2、设 $\int xf(x)dx = \arccos x + C$，求 $f(x)$。

知识点：考查不定积分（原函数）与被积函数的关系。

思路分析：直接利用不定积分的性质 1：$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x)$ 即可。

解：等式两边对 x 求导数得：

$$xf(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \therefore f(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

★3、设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，求 $f(x)$ 的原函数全体。

知识点： 仍为考查不定积分（原函数）与被积函数的关系。

思路分析：连续两次求不定积分即可。

解：由题意可知，$f(x)=\int \sin x dx=-\cos x+C_1$

所以 $f(x)$ 的原函数全体为：$\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2$。

★4、证明函数 $\frac{1}{2}e^{2x}, e^x shx$ 和 $e^x chx$ 都是 $\frac{e^x}{chx-shx}$ 的原函数

知识点： 考查原函数（不定积分）与被积函数的关系。

思路分析：只需验证即可。

解：$\because \frac{e^x}{chx-shx}=e^{2x}$，而 $\frac{d}{dx}[(\frac{1}{2}e^{2x})]=\frac{d}{dx}[e^x shx]=\frac{d}{dx}[e^x chx]=e^{2x}$

★5、一曲线通过点 $(e^2,3)$，且在任意点处的切线的斜率都等于该点的横坐标的倒数，求此曲线的方程。

知识点： 属于第 12 章最简单的一阶线性微分方程的初值问题，实质仍为考查原函数（不定积分）与被积函数的关系。

思路分析：求得曲线方程的一般式，然后将点的坐标带入方程确定具体的方程即可。

解：设曲线方程为 $y=f(x)$，由题意可知：$\frac{d}{dx}[f(x)]=\frac{1}{x}$，$\therefore f(x)=\ln|x|+C$；

又点 $(e^2,3)$ 在曲线上，适合方程，有 $3=\ln(e^2)+C, \therefore C=1$，

所以曲线的方程为 $f(x)=\ln|x|+1.$

★★6、一物体由静止开始运动，经 t 秒后的速度是 $3t^2(m/s)$，问：

（1） 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少？

（2） 物体走完 360 米需要多少时间？

知识点： 属于最简单的一阶线性微分方程的初值问题，实质仍为考查原函数（不定积分）与被积函数的关系。

思路分析：求得物体的位移方程的一般式，然后将条件带入方程即可。

解：设物体的位移方程为：$y=f(t)$，

则由速度和位移的关系可得：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[f(t)]=3t^2 \Rightarrow f(t)=t^3+C$，

又因为物体是由静止开始运动的，$\therefore f(0)=0, \therefore C=0, \therefore f(t)=t^3$。

(1) 3 秒后物体离开出发点的距离为: $f(3)=3^3=27$ 米；

(2)令 $t^3=360 \Rightarrow t=\sqrt[3]{360}$ 秒。

习题 4-2

★1、填空是下列等式成立。

知识点：练习简单的凑微分。

思路分析：根据微分运算凑齐系数即可。

解：$(1)dx=\frac{1}{7}d(7x-3);(2)xdx=-\frac{1}{2}d(1-x^2);(3)x^3dx=\frac{1}{12}d(3x^4-2);$

$(4)e^{2x}dx=\frac{1}{2}d(e^{2x});(5)\frac{dx}{x}=\frac{1}{5}d(5\ln|x|);(6)\frac{dx}{x}=-\frac{1}{5}d(3-5\ln|x|);$

$(7)\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2d(\sqrt{t});(8)\frac{dx}{\cos^2 2x}=\frac{1}{2}d(\tan 2x);(9)\frac{dx}{1+9x^2}=\frac{1}{3}d(\arctan 3x).$

2、求下列不定积分。

知识点：（凑微分）第一换元积分法的练习。

思路分析：审题看看是否需要凑微分。直白的讲，凑微分其实就是看看积分表达式中，有没有成块的形式作为一个整体变量，这种能够马上观察出来的功夫来自对微积分基本公式的熟练掌握。此外第二类换元法中的倒代换法对特定的题目也非常有效，这在课外例题中专门介绍！

★（1）$\int e^{3t}dt$

思路:凑微分。

解：$\int e^{3t}dt=\frac{1}{3}\int e^{3t}d(3t)=\frac{1}{3}e^{3t}+C$

★(2) $\int (3-5x)^3dx$

思路:凑微分。

解：$\int (3-5x)^3dx=-\frac{1}{5}\int (3-5x)^3\mathrm{d}(3-5x)=-\frac{1}{20}(3-5x)^4+C$

★(3) $\int \frac{1}{3-2x}dx$

思路:凑微分。

解：$\int\frac{1}{3-2x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{3-2x}d(3-2x)=-\frac{1}{2}\ln|3-2x|+C.$

★(4) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{5-3x}}dx$

思路:凑微分。

解：$\int\frac{1}{\sqrt[3]{5-3x}}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt[3]{5-3x}}d(5-3x)=-\frac{1}{3}\int(5-3x)^{-\frac{1}{3}}d(5-3x)=-\frac{1}{2}(5-3x)^{\frac{2}{3}}+C.$

★(5) $\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx$

思路:凑微分。

解：$\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx=\frac{1}{a}\int\sin axd(ax)-b\int e^{\frac{x}{b}}d(\frac{x}{b})=-\frac{1}{a}\cos ax-be^{\frac{x}{b}}+C$

★★(6) $\int\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

思路:如果你能看到$d(\sqrt{t})=\frac{1}{2\sqrt{t}}d\mathrm{t}$，凑出$d(\sqrt{t})$易解。

解：$\int\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int\cos\sqrt{t}d(\sqrt{t})=2\sin\sqrt{t}+C$

★(7) $\int\tan^{10}x\sec^2xdx$

思路:凑微分。

解：$\int\tan^{10}x\sec^2xdx=\int\tan^{10}xd(\tan x)=\frac{1}{11}\tan^{11}x+C.$

★★(8) $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$

思路:连续三次应用公式(3)凑微分即可。

解：$\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int\frac{d(\ln|x|)}{\ln x\ln\ln x}=\int\frac{d(\ln|\ln x|)}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C$

★★(9) $\int\tan\sqrt{1+x^2}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

思路:本题关键是能够看到$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ 是什么，是什么呢？就是$\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$ ！这有一定难度！

解：$\int \tan\sqrt{1+x^2}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \tan\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2} = -\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C$

★★(10) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$

思路:凑微分。

解：

方法一： 倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$。

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{2dx}{\sin 2x} = \int \csc 2x d2x = \ln|\csc 2x - \cot 2x| + C$$

方法二： 将被积函数凑出 $\tan x$ 的函数和 $\tan x$ 的导数。

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\tan x}\sec^2 x dx = \int \frac{1}{\tan x}d\tan x = \ln|\tan x| + C$$

方法三： 三角公式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，然后凑微分。

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} + \int \frac{d\sin x}{\sin x}$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C = \ln|\tan x| + C$$

★★(11) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

思路:凑微分：$\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \frac{de^x}{1+e^{2x}} = \frac{de^x}{1+(e^x)^2}$。

解：$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{de^x}{1+(e^x)^2} = \arctan e^x + C$

★(12) $\int x\cos(x^2)dx$

思路:凑微分。

解：$\int x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$

★★(13) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}}$

思路:由 $\frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{\sqrt{2-3x^2}} = -\frac{1}{6}\frac{d(2-3x^2)}{\sqrt{2-3x^2}}$ 凑微分易解。

解：$\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}} = -\frac{1}{6}\int \frac{d(2-3x^2)}{\sqrt{2-3x^2}} = -\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^{-\frac{1}{2}} d(2-3x^2) = -\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+C$

★★(14) $\int \cos^2(\omega t)\sin(\omega t)dt$

思路:凑微分。

解：$\int \cos^2(\omega t)\sin(\omega t)dt = \frac{1}{\omega}\int \cos^2(\omega t)\sin(\omega t)d\omega t = -\frac{1}{\omega}\int \cos^2(\omega t)d\cos(\omega t)$

$= -\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t)+C.$

★★(15) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$

思路:凑微分。

解: $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x^3}{1-x^4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1-x^4}dx^4 = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{1-x^4}d(1-x^4) = -\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C.$

★(16) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

思路:凑微分。

解：$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = -\int \frac{1}{\cos^3 x}d\cos x = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}+C.$

★★(17) $\int \frac{x^9}{\sqrt{2-x^{20}}}dx$

思路:经过两步凑微分即可。

解：$\int \frac{x^9}{\sqrt{2-x^{20}}}dx = \int \frac{1}{10}\frac{1}{\sqrt{2-x^{20}}}dx^{10} = \frac{1}{10}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x^{10}}{\sqrt{2}})^2}}d\frac{x^{10}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{10}\arcsin(\frac{x^{10}}{\sqrt{2}})+C$

★★(18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

思路:分项后分别凑微分即可。

解：$\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{3})^2}}d\frac{2x}{3}-\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}d\,4x^2$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{3})^2}}d\frac{2x}{3}+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}d(9-4x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(\frac{2x}{3})+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C.$$

★★(19) $\int\frac{dx}{2x^2-1}$

思路:裂项分项后分别凑微分即可。

解： $\int\frac{dx}{2x^2-1}=\int\frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{\sqrt{2}x-1}-\frac{1}{\sqrt{2}x+1})dx$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int(\frac{1}{\sqrt{2}x-1}-\frac{1}{\sqrt{2}x+1})d\sqrt{2}x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{2}x-1}d(\sqrt{2}x-1)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{2}x+1}d(\sqrt{2}x+1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C.$$

★(20) $\int\frac{xdx}{(4-5x)^2}$

思路:分项后分别凑微分即可。

解： $\int\frac{xdx}{(4-5x)^2}=\int-\frac{1}{5}(\frac{4-5x-4}{(4-5x)^2})\ dx=\frac{1}{25}\int(\frac{1}{4-5x}-4\frac{1}{(4-5x)^2})\ d(4-5x)$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{1}{4-5x}d(4-5x)-\frac{4}{25}\int\frac{1}{(4-5x)^2}d(4-5x)=\frac{1}{25}\ln|4-5x|+\frac{4}{25}\frac{1}{4-5x}+C.$$

★(21) $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^{100}}$

思路:分项后分别凑微分即可。

解： $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^{100}}=\int\frac{(x-1+1)^2dx}{(x-1)^{100}}=\int(\frac{(x-1)^2}{(x-1)^{100}}+2\frac{(x-1)}{(x-1)^{100}}+\frac{1}{(x-1)^{100}})dx$

$$=\int(\frac{1}{(x-1)^{98}}+2\frac{1}{(x-1)^{99}}+\frac{1}{(x-1)^{100}})d(x-1)$$

$$=-\frac{1}{97}\frac{1}{(x-1)^{97}}-\frac{1}{49}\frac{1}{(x-1)^{98}}-\frac{1}{99}\frac{1}{(x-1)^{99}}+C.$$

★★(22) $\int\frac{xdx}{x^8-1}$

思路:裂项分项后分别凑微分即可。

解： $\int\frac{xdx}{x^8-1}=\int\frac{xdx}{(x^4-1)(x^4+1)}=\int\frac{1}{2}(\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{x^4+1})xdx=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{x^4+1})dx^2$

$$=\frac{1}{4}\int[\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1})-\frac{1}{x^4+1}]dx^2=\frac{1}{8}[\int\frac{1}{x^2-1}d(x^2-1)-\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)]$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x^2)^2+1}dx^2=\frac{1}{8}\ln|\frac{x^2-1}{x^2+1}|-\frac{1}{4}\arctan x^2+C.$$

★(23) $\int\cos^3 xdx$

思路:凑微分。$\cos xdx=d\sin x$。

解： $\int\cos^3 xdx=\int\cos^2 x\cdot\cos xdx=\int\cos^2 xd\sin x=\int(1-\sin^2 x)d\sin x$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

★★(24) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)dt$

思路:降幂后分项凑微分。

解： $\int\cos^2(\omega t+\varphi)dt=\int\frac{1+\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}dt=\int\frac{1}{2}dt+\frac{1}{4\omega}\int\cos 2(\omega t+\varphi)d2(\omega t+\varphi)$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4\omega}\sin 2(\omega t+\varphi)+C$$

★★★(25) $\int\sin 2x\cos 3xdx$

思路:积化和差后分项凑微分。

解： $\int\sin 2x\cos 3xdx=\int\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)dx=\frac{1}{10}\int\sin 5xd5x-\frac{1}{2}\int\sin xdx$

$$=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C$$

★★★(26) $\int\sin 5x\sin 7xdx$

思路:积化和差后分项凑微分。

解：$\int \sin 5x \sin 7x dx = \int \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x) dx = \frac{1}{4}\int \cos 2x d2x - \frac{1}{24}\int \cos 12x d(12x)$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$

★★★(27) $\int \tan^3 x \sec x dx$

思路:凑微分 $\tan x \sec x dx = d\sec x$ 。

解：$\int \tan^3 x \sec x dx = \int \tan^2 x \cdot \tan x \sec x dx = \int \tan^2 x d\sec x = \int (\sec^2 x - 1) d\sec x$

$= \int \sec^2 x d\sec x - \int d\sec x = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

★★(28) $\int \frac{10^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

思路:凑微分 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(-\arccos x)$ 。

解：$\int \frac{10^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int 10^{\arccos x} d\arccos x = -\frac{10^{\arccos x}}{\ln 10} + C.$

★★(29) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$

思路:凑微分 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x)$ 。

解：$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C$

★★★★(30) $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

思路:凑微分 $\frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \frac{2\arctan \sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x} = 2\arctan \sqrt{x} d(\arctan \sqrt{x})$ 。

解：$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int \frac{2\arctan \sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x} = \int 2\arctan \sqrt{x} d(\arctan \sqrt{x})$

$= (\arctan \sqrt{x})^2 + C$

★★★★(31) $\int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} dx$

思路:被积函数中间变量为 $\tan x$ ，故须在微分中凑出 $\tan x$ ，即被积函数中凑出 $\sec^2 x$ ，

$$\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx=\frac{\ln\tan x}{\cos^2 x\tan x}dx=\frac{\ln\tan x}{\tan x}\sec^2 xdx=\frac{\ln\tan x}{\tan x}d\ \tan x$$

$$=\ln\tan xd(\ln\tan x)=d(\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2)$$

解：$\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{\cos^2 x\tan x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}d\ \tan x=\int\ln\tan xd(\ln\tan x)$

$=\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$

★★★★(32) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$

思路: $d(x\ln x)=(1+\ln x)dx$

解：$\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=\int\frac{1}{(x\ln x)^2}d(x\ln x)=-\frac{1}{x\ln x}+C$

★★★★(33) $\int\frac{dx}{1-e^x}$

解：**方法一**：

思路:将被积函数的分子分母同时除以 e^x，则凑微分易得。

$$\int\frac{dx}{1-e^x}=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}dx=-\int\frac{1}{e^{-x}-1}d(e^{-x})=-\int\frac{1}{e^{-x}-1}d(e^{-x}-1)=-\ln|e^{-x}-1|+C$$

方法二:

思路:分项后凑微分

$$\int\frac{dx}{1-e^x}=\int\frac{1-e^x+e^x}{1-e^x}dx=\int 1dx+\int\frac{e^x}{1-e^x}dx=x-\int\frac{1}{1-e^x}d(1-e^x)$$

$$=x-\ln|1-e^x|+C=x-\ln(e^x|e^{-x}-1|)+C$$

$$=x-(\ln e^x-\ln|e^{-x}-1|)+C=-\ln|e^{-x}-1|+C$$

方法三:

思路: 将被积函数的分子分母同时乘以 e^x，裂项后凑微分。

$$\int\frac{dx}{1-e^x}=\int\frac{e^xdx}{e^x(1-e^x)}=\int\frac{de^x}{e^x(1-e^x)}=\int\left[\frac{1}{e^x}+\frac{1}{1-e^x}\right]de^x=\ln e^x-\int\frac{1}{1-e^x}d(1-e^x)$$

$$=x-\ln|1-e^x|+C=-\ln|e^{-x}-1|+C$$

★★★★(34) $\int \frac{dx}{x(x^6+4)}$

解：**方法一:**

思路：分项后凑积分。

$$\int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{x(x^6+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{x^6+4-x^6dx}{x(x^6+4)} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\int \frac{d(x^6+4)}{x^6+4} = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\ln|x^6+4| + C$$

方法二：**思路:**利用第二类换元法的倒代换。

令 $x = \frac{1}{t}$，则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ 。

$$\therefore \int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \int \frac{t}{\frac{1}{t^6}+4} \times (-\frac{1}{t^2})dt = -\frac{1}{24}\int \frac{d(4t^6)}{1+4t^6} = -\frac{1}{24}\int \frac{d(4t^6+1)}{1+4t^6}$$

$$= -\frac{1}{24}\ln(1+4t^6) + C = -\frac{1}{24}\ln(1+\frac{4}{x^6}) + C.$$

★★★★(35) $\int \frac{dx}{x^8(1-x^2)}$

解：**方法一:**

思路：分项后凑积分。

$$\int \frac{dx}{x^8(1-x^2)} = \int \frac{1-x^8+x^8}{x^8(1-x^2)}dx = \int \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)}{x^8(1-x^2)}dx + \int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \int \frac{1+x^2+x^4+x^6}{x^8}dx + \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \int (\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2})dx + \int \frac{1}{1-x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{7x^7} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$$

方法二： **思路:** 利用第二类换元法的倒代换。

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ 。

$$\therefore \int\frac{dx}{x^8(1-x^2)}=\int\frac{t^8}{1-\frac{1}{t^2}}\times(-\frac{1}{t^2}dt)=-\int\frac{t^8}{t^2-1}dt=-\int(t^6+t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2-1})dt$$

$$=-\int(t^6+t^4+t^2+1)dt-\int(\frac{1}{t^2-1})dt=-\int(t^6+t^4+t^2+1)dt-\frac{1}{2}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt$$

$$=-\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3-t-\frac{1}{2}\ln|\frac{t-1}{t+1}|+C=-\frac{1}{7}\frac{1}{x^7}-\frac{1}{5}\frac{1}{x^5}-\frac{1}{3}\frac{1}{x3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln|\frac{1-x}{1+x}|+C$$

3、求下列不定积分。

知识点:（真正的换元，主要是三角换元）第二种换元积分法的练习。

思路分析：题目特征是----被积函数中有二次根式，如何化无理式为有理式？三角函数中，下列二恒等式起到了重要的作用。

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\qquad \sec^2 x-\tan^2 x=1.$$

为保证替换函数的单调性，通常将交的范围加以限制，以确保函数单调。不妨将角的范围统统限制在锐角范围内，得出新变量的表达式，再形式化地换回原变量即可。

★★★(1) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$

思路:令 $x=\sin t,|t|<\frac{\pi}{2}$，先进行三角换元，分项后，再用三角函数的升降幂公式。

解：令 $x=\sin t,|t|<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos tdt$ 。

$$\therefore \int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos tdt}{1+\cos t}=\int dt-\int\frac{dt}{1+\cos t}=t-\int\frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}=t-\int\sec^2\frac{t}{2}d\frac{t}{2}$$

$$=t-\tan\frac{t}{2}+C=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C.\ （或=\arcsin x-\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C）$$

（万能公式 $\tan\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{1-\cos t}{\sin t}$，又 $\sin t=x$ 时，$\cos t=\sqrt{1-x^2}$ ）

★★★(2) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

思路:令 $x=3\sec t,t\in(0,\frac{\pi}{2})$，三角换元。

解：令 $x=3\sec t,t\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $dx=3\sec t\tan tdt$ 。

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{3\tan t}{3\sec t} 3\sec t \tan t dt = 3\int \tan^2 t dt = 3\int (\sec^2 t - 1)dt$$

$$= 3\tan t - 3t + C = \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{|x|} + C.$$

（$x = 3\sec x$时，$\cos x = \frac{3}{x}, \sin x = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}, \tan x = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$）

★★★(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

思路:令 $x = \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$，三角换元。

解：令 $x = \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$，则 $dx = \sec^2 t dt$。

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{\sec^3 t} = \int \frac{dt}{\sec t} = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

★★★(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$

思路:令 $x = \mathrm{a}\tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$，三角换元。

解：令 $x = a\tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$，则 $dx = \mathrm{a}\sec^2 t dt$。

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \int \frac{a\sec^2 t dt}{a^3\sec^3 t} = \int \frac{dt}{a^2\sec t} = \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C$$

$$= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

★★★★(5) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$

思路:先令 $u = x^2$，进行第一次换元；然后令 $u = \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$，进行第二次换元。

解：$\because \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^4+1}}dx^2$，令 $u = x^2$ 得：

$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u+1}{u\sqrt{u^2+1}}du$，令 $u = \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$，则 $du = \sec^2 t dt$，

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u+1}{u\sqrt{u^2+1}}du = \frac{1}{2}\int \frac{\tan t+1}{\tan t\cdot\sec t}\sec^2 tdt = \frac{1}{2}\int \frac{\tan t+1}{\tan t}\sec tdt$$

$$= \frac{1}{2}\int(\csc t+\sec t)dt = \frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t| + \frac{1}{2}\ln|\csc t-\cot t| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{u^2+1}+u\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}-\frac{1}{u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^4+1}+x^2\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^2}\right| + C.$$

（与课本后答案不同）

★★★(6) $\int\sqrt{5-4x-x^2}dx$

思路:三角换元，关键配方要正确。

解：$\because 5-4x-x^2 = 9-(x+2)^2$，令 $x+2 = 3\sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$，则 $dx = 3\cos tdt$。

$$\therefore \int\sqrt{5-4x-x^2}dx = \int 9\cos^2 tdt = 9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 9(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t)+C$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x+2}{3} + \frac{x+2}{2}\sqrt{5-4x-x^2} + C.$$

★★4、求一个函数 $f(x)$ ，满足 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$，且 $f(0)=1$。

思路:求出 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 的不定积分，由条件 $f(0)=1$ 确定出常数C 的值即可。

解：$\because \int\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1+x}}d(x+1) = 2\sqrt{1+x}+C.$

令 $f(x) = 2\sqrt{1+x}+C$，又 $f(0)=1$，可知 $C=-1$，

$\therefore f(x) = 2\sqrt{1+x}-1.$

★★★5、设 $I_n = \int\tan^n xdx,$，求证：$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}$，并求 $\int\tan^5 xdx$。

思路:由目标式子可以看出应将被积函数 $\tan^n x$ 分开成 $\tan^{n-2}x\tan^2 x$，进而写成：

$\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1) = \tan^{n-2}x\sec^2 x - \tan^{n-2}x$，分项积分即可。

证明：$I_n = \int\tan^n xdx = \int(\tan^{n-2}x\sec^2 x - \tan^{n-2}x)dx = \int\tan^{n-2}x\sec^2 xdx - \int\tan^{n-2}xdx$

$$=\int \tan^{n-2} x d\tan x - I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}.$$

$n=5$时，$I_5=\int \tan^5 x dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - I_3 = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + I_1$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \int \tan x dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

习题 4-3

1、 求下列不定积分：

知识点： 基本的分部积分法的练习。

思路分析： 严格按照“‘反、对、幂、三、指’顺序，越靠后的越优先纳入到微分号下凑微分。”的原则进行分部积分的练习。

★（1） $\int \arcsin x dx$

思路: 被积函数的形式看作 $x^0 \arcsin x$，按照“反、对、幂、三、指”顺序，幂函数 x^0 优先纳入到微分号下，凑微分后仍为 dx。

解： $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$

$$=x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

★★（2） $\int \ln(1+x^2) dx$

思路： 同上题。

解： $\int \ln(1+x^2) dx = x\ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2} dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$

$$=x\ln(1+x^2) - \int \frac{2(x^2+1)-2}{1+x^2} dx = x\ln(1+x^2) - \int 2dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$=x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C.$$

★（3） $\int \arctan x dx$

思路： 同上题。

解： $\int \arctan x dx = x\arctan x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

★★(4) $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$

思路：严格按照"反、对、幂、三、指"顺序凑微分即可。

解：$\because \int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=\int\sin\frac{x}{2}d(-\frac{1}{2}e^{-2x})=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int\cos\frac{x}{2}d(-\frac{1}{2}e^{-2x})$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{16}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$$

$$\therefore \int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=-\frac{2e^{-2x}}{17}(4\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})+C.$$

★★(5) $\int x^2\arctan xdx$

思路：严格按照"反、对、幂、三、指"顺序凑微分即可。

解：$\int x^2\arctan xdx=\int\arctan xd(\frac{x^3}{3})=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\int\frac{1}{3}x^3\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3+x-x}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int(x-\frac{x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int xdx+\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

★(6) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

思路：严格按照"反、对、幂、三、指"顺序凑微分即可。

解：$\int x\cos\frac{x}{2}dx=2\int xd\sin\frac{x}{2}=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}dx=2x\sin\frac{x}{2}-4\int\sin\frac{x}{2}d\frac{x}{2}$

$$=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C.$$

★★(7) $\int x\tan^2 xdx$

思路：严格按照"反、对、幂、三、指"顺序凑微分即可。

解：$\int x\tan^2 xdx=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int(x\sec^2 x-x)dx=\int x\sec^2 xdx-\int xdx$

$=\int xd(\tan x)-\int xdx=x\tan x-\int\tan xdx-\frac{1}{2}x^2=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C.$

★★(8) $\int\ln^2 xdx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int\ln^2 xdx=x\ln^2 x-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln^2 x-2\int\ln xdx=x\ln^2 x-2x\ln x+2\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=x\ln^2 x-2x\ln x+2\int dx=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$

★★(9) $\int x\ln(x-1)dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x\ln(x-1)dx=\int\ln(x-1)d\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1+1}{x-1}dx=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+1+\frac{1}{x-1})dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(x-1)+C$

★★(10) $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx=\int\ln^2 xd(-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\ln^2 x+\int\frac{1}{x}2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{x}\ln^2 x+2\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\ln^2 x+2\int\ln xd(-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x+2\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C$

$=-\frac{1}{x}(\ln^2 x+\ln x+2)+C$

★★(11) $\int\cos\ln xdx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\because\int\cos\ln xdx=x\cos\ln x+\int x\sin\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cos\ln x+\int\sin\ln xdx$

$$=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int x\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx$$

$$\therefore\int\cos\ln xdx=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$$

★★(12) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

思路：详见第(10) 小题解答中间，解答略。

★★(13) $\int x^n\ln xdx \qquad (n\neq -1)$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x^n\ln xdx=\int\ln xd\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\int\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\int\frac{1}{n+1}x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{(n+1)}\right)+C.$$

★★(14) $\int x^2e^{-x}dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+\int e^{-x}2xdx=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C=-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$$

★★(15) $\int x^3(\ln x)^2dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x^3(\ln x)^2dx=\int(\ln x)^2d(\frac{1}{4}x^4)=\frac{1}{4}x^4(\ln x)^2-\frac{1}{4}\int x^4\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{1}{4}x^4(\ln x)^2-\frac{1}{2}\int x^3\ln xdx=\frac{1}{4}x^4(\ln x)^2-\frac{1}{8}\int\ln xdx^4$$

$$=\frac{1}{4}x^4(\ln x)^2-\frac{1}{8}x^4\ln x+\frac{1}{8}\int x^4\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}x^4(\ln x)^2-\frac{1}{8}x^4\ln x+\frac{1}{8}\int x^3dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4(\ln x)^2-\frac{1}{8}x^4\ln x+\frac{1}{32}x^4+C=\frac{1}{8}x^4(2\ln^2x-\ln x+\frac{1}{4})+C.$$

★★(16) $\int\frac{\ln\ln x}{x}dx$

思路： 将积分表达式 $\frac{\ln\ln x}{x}dx$ 写成 $\ln\ln xd(\ln x)$，将 $\ln x$ 看作一个整体变量积分即可。

解：$\int \frac{\ln\ln x}{x}dx = \int \ln\ln x d(\ln x) = \ln x \ln\ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}dx = \ln x \ln\ln x - \int \frac{1}{x}dx$

$= \ln x \ln\ln x - \ln x + C = \ln x(\ln\ln x - 1) + C.$

★★★ (17) $\int x\sin x\cos x dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x\sin x\cos xdx = \int \frac{1}{2}x\sin 2xdx = \frac{1}{2}\int xd(-\frac{1}{2}\cos 2x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2xdx$

$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\int \cos 2xd2x = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.$

★★(18) $\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$

思路：先将 $\cos^2 \frac{x}{2}$ 降幂得 $\frac{1+\cos x}{2}$，然后分项积分；第二个积分严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2}dx = \int (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cos x)dx = \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{1}{2}\int x^2\cos xdx$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\int x^2 d\sin x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x - \frac{1}{2}\int 2x\sin xdx$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x + \int xd\cos x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x + x\cos x - \int \cos xdx$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\sin x + x\cos x - \sin x + C$

★★(19) $\int (x^2-1)\sin 2xdx$

思路：分项后对第一个积分分部积分。

解：$\int (x^2-1)\sin 2xdx = \int x^2\sin 2xdx - \int \sin 2xdx = \int x^2 d(-\frac{1}{2}\cos 2x) + \frac{1}{2}\cos 2x$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\int 2x\cos 2xdx + \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\int xd\sin 2x$

$+ \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx + \frac{1}{2}\cos 2x$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C = -\frac{1}{2}(x\sin 2x - \frac{3}{2})\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C.$

★★★(20) $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$

思路：首先换元，后分部积分。

解：令 $t=\sqrt[3]{x}$，则 $x=t^3,dx=3t^2dt,$

$$\therefore \int e^{\sqrt[3]{x}}dx=\int e^t 3t^2dt=3\int e^t t^2dt=3\int t^2de^t=3t^2e^t-3\int 2te^tdt$$
$$=3t^2e^t-3\int 2tde^t=3t^2e^t-6e^t t+6\int e^tdt=3t^2e^t-6e^tt+6e^t+C$$
$$=3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}-6e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x}+6e^{\sqrt[3]{x}}+C=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C.$$

★★★(21) $\int(\arcsin x)^2dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-\int x\cdot\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x(\arcsin x)^2+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x d(\sqrt{1-x^2})$$
$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

★★★(22) $\int e^x\sin^2 xdx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：方法一：

$$\int e^x\sin^2 xdx=\int\sin^2 xde^x=e^x\sin^2 x-\int e^x 2\sin x\cos xdx$$
$$=e^x\sin^2 x-\int e^x\sin 2xdx$$
$$\because \int e^x\sin 2xdx=\int\sin 2xde^x=e^x\sin 2x-\int e^x 2\cos 2xdx=e^x\sin 2x-2\int\cos 2xde^x$$
$$=e^x\sin 2x-2e^x\cos 2x-4\int e^x\sin 2xdx$$
$$\therefore \int e^x\sin 2xdx=\frac{e^x(\sin 2x-2\cos 2x)}{5}+C$$
$$\therefore \int e^x\sin^2 xdx=\frac{e^x}{5}(5\sin^2 x-\sin 2x+2\cos 2x)+C$$

方法二：

$$\int e^x\sin^2 xdx=\int e^x\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int e^xdx-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx$$

$\because \int e^x \cos 2xdx = \int \cos 2xde^x = e^x \cos 2x + \int e^x 2\sin 2xdx = e^x \cos 2x + 2\int \sin 2xde^x$

$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2xdx$

$\therefore \int e^x \cos 2xdx = \dfrac{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)}{5} + C$

$\therefore \int e^x \sin^2 xdx = \dfrac{e^x}{2} - \dfrac{1}{5}e^x \sin 2x - \dfrac{1}{10}e^x \cos 2x + C$

★★★(23) $\int \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx = \int \ln(1+x)d(2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}dx$

令$t = \sqrt{x}$，则$dx = 2tdt$,

$\therefore \int \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}dx = 4\int \dfrac{t^2}{1+t^2}dt = 4\int dt - 4\int \dfrac{1}{1+t^2}dt = 4t - 4\arctan t - C$

$= 4\sqrt{x} - 4\arctan\sqrt{x} - C$

所以原积分$\int \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - 4\sqrt{x} + 4\arctan\sqrt{x} + C$ 。

★★★(24) $\int \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx = \int \ln(1+e^x)d(-e^{-x}) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int e^{-x}\dfrac{e^x}{1+e^x}dx$

$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -e^{-x}\ln(1+e^x) - \int \dfrac{1}{1+e^{-x}}d(1+e^{-x})$

$= -e^{-x}\ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x}) + C.$

注：该题中$\int \dfrac{1}{1+e^x}dx$ 的其他计算方法可参照习题 4-2，2（33）。

★★★(25) $\int x\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\int \ln\frac{1+x}{1-x}d(\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\int x^2\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\int dx-\int\frac{1}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\int(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})dx=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\left[-\ln(1-x)+\ln(1+x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C$$

注： 该题也可以化为 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\int x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]dx$ 再利用分部积分法计算。

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\int x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]dx=\int[\ln(1+x)-\ln(1-x)]d\,\frac{x^2}{2}$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{2}\cdot[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}]dx=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\frac{1-x^2-1}{1-x^2}dx=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int dx-\frac{1}{2}\int[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}]dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$$

★★★(26) $\int\frac{dx}{\sin 2x\cos x}$

思路：将被积表达式 $\frac{dx}{\sin 2x\cos x}$ 写成 $\frac{dx}{2\sin x\cos^2 x}=\frac{\sec^2 xdx}{2\sin x}=\frac{d\tan x}{2\sin x}$，然后分部积分即可。

解：$\int\frac{dx}{\sin 2x\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin x\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 xdx}{2\sin x}=\int\frac{d\tan x}{2\sin x}$

$$=\frac{\tan x}{2\sin x}-\frac{1}{2}\int\tan x(-\csc x\cot x)dx=\frac{\tan x}{2\sin x}+\frac{1}{2}\int\csc xdx$$

$$=\frac{1}{2}(\sec x+\ln\left|\csc x-\cot x\right|)+C.$$

2、 用列表法求下列不定积分。

知识点：仍是分部积分法的练习。

思路分析：审题看看是否需要分项，是否需要分部积分，是否需要凑微分。按照各种方法完成。我们仍然用一般方法解出，不用列表法。

★(1) $\int xe^{3x}dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int xe^{3x}dx=\int xd(\frac{1}{3}e^{3x})=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}\int e^{3x}d3x=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3})e^{3x}+C.$

★(2) $\int(x+1)e^{x}dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int(x+1)e^{x}dx=\int(x+1)de^{x}=(x+1)e^{x}-\int e^{x}dx=xe^{x}+C$ 。

★(3) $\int x^{2}\cos xdx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x^{2}\cos xdx=\int x^{2}d\sin x=x^{2}\sin x-2\int x\sin xdx=x^{2}\sin x+2\int xd\cos x$

$=x^{2}\sin x+2x\cos x-2\int\cos xdx=x^{2}\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$

★(4) $\int(x^{2}+1)e^{-x}dx$

思路：分项后分部积分即可。

解：$\int(x^{2}+1)e^{-x}dx=\int x^{2}e^{-x}dx+\int e^{-x}dx=\int x^{2}d(-e^{-x})+\int e^{-x}dx$

$=-e^{-x}x^{2}+2\int xe^{-x}dx+\int e^{-x}dx=-e^{-x}x^{2}+2\int xd(-e^{-x})+\int e^{-x}dx$

$=-e^{-x}x^{2}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx+\int e^{-x}dx=-e^{-x}x^{2}-2xe^{-x}+3\int e^{-x}dx$

$=-e^{-x}(x^{2}+2x+3)+C.$

★(5) $\int x\ln(x+1)dx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\int x\ln(x+1)dx=\int\ln(x+1)d(\frac{1}{2}x^{2})=\frac{1}{2}x^{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^{2}}{x+1}dx$

$=\frac{1}{2}x^{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int(x-1+\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{2}x^{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(x+1)+C.$

★(6) $\int e^{-x}\cos xdx$

思路：严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分即可。

解：$\because\int e^{-x}\cos xdx=\int\cos xd(-e^{-x})=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin xdx$

$$= -e^{-x}\cos x - \int \sin x d(-e^{-x}) = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x dx$$

$$\therefore \int e^{-x}\cos x dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

★3、已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，求 $\int xf'(x)dx$ 。

知识点：考察原函数的定义及分部积分法的练习。

思路分析：积分 $\int xf'(x)dx$ 中出现了 $f'(x)$，应马上知道积分应使用分部积分， 条件告诉你 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，应该知道 $\int f(x)dx = \frac{\sin x}{x} + C.$

解：$\because \int xf'(x)dx = \int x\mathrm{d}(f(x)) = xf(x) - \int f(x)dx$

又 $\because \int f(x)dx = \frac{\sin x}{x} + C, \therefore f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, \therefore xf(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x};$

$$\therefore \int xf'(x)dx = \frac{x\cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2}{x}\sin x + \mathrm{C}$$

★★4、已知 $f(x) = \frac{e^x}{x}$，求 $\int xf''(x)dx$ 。

知识点：仍然是分部积分法的练习。

思路分析：积分 $\int xf''(x)dx$ 中出现了 $f''(x)$，应马上知道积分应使用分部积分。

解：$\because \int xf''(x)dx = \int xd(f'(x)) = xf'(x) - \int f'(x)dx = xf'(x) - f(x) + C.$

又 $\because f(x) = \frac{e^x}{x}, \therefore f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \therefore xf'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x};$

$$\therefore \int xf''(x)dx = \frac{e^x(x-1)}{x} - \frac{e^x}{x} + C = \frac{e^x(x-2)}{x} + C.$$

★★★★5、设 $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$，$(n \geq 2)$；证明：$I_n = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$ 。

知识点：仍然是分部积分法的练习。

思路分析：要证明的目标表达式中出现了 I_n，$\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$ 和 I_{n-2} 提示我们如何在被积函数的表达式 $\frac{1}{\sin^n x}$ 中变出 $\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$ 和 $\frac{1}{\sin^{n-2} x}$ 呢？这里涉及到三角函数中1的变形应用，初等数学中有过专门的介绍，这里1可变为 $\sin^2 x + \cos^2 x$ 。

证明：$\because 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\therefore I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx+\int\frac{\sin^2 x}{\sin^n x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx+\int\frac{1}{\sin^{n-2}x}dx$$

$$=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx+I_{n-2}=\int\frac{\cos x}{\sin^n x}d\sin x+I_{n-2}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin^n x}\sin x-\int\sin x\cdot\frac{-\sin x\cdot\sin^n x-n\sin^{n-1}x\cos^2 x}{\sin^{2n}x}dx+I_{n-2}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+I_{n-2}+n\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx+I_{n-2}=\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+I_{n-2}+n\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x}dx+I_{n-2}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+I_{n-2}+nI_n-nI_{n-2}+I_{n-2}=\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+nI_n-(n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore I_n=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

★★★★6、设 $f(x)$ 为单调连续函数， $f^{-1}(x)$ 为其反函数，且 $\int f(x)dx=F(x)+C$ ，

求： $\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$ 。

知识点：本题考察了一对互为反函数的函数间的关系，还有就是分部积分法的练习。

思路分析：要明白 $x=f(f^{-1}(x))$ 这一恒等式，在分部积分过程中适时替换。

解： $\because\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-\int x\mathrm{d}(f^{-1}(x))$

又 $\because x=f(f^{-1}(x))$

$$\therefore\int f^{-1}(x)dx=f^{-1}(x)-\int xd(f^{-1}(x))=f^{-1}(x)-\int f(f^{-1}(x))d(f^{-1}(x))$$

又 $\because\int f(x)dx=F(x)+C$

$$\therefore\int f^{-1}(x)dx=f^{-1}(x)-\int f(f^{-1}(x))d(f^{-1}(x))=f^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$

习题 4-4

1、 求下列不定积分

知识点：有理函数积分法的练习。

思路分析：被积函数为有理函数的形式时，要区分被积函数为有理真分式还是有理假分式，若是假分式，通常将被积函数分解为一个整式加上一个真分式的形式，然后再具体问题具体分析。

★(1) $\int\frac{x^3}{x+3}dx$

思路：被积函数为假分式，先将被积函数分解为一个整式加上一个真分式的形式，然后分项积分。

解：$\because \dfrac{x^3}{x+3}=\dfrac{x^3+27-27}{x+3}=x^2-3x+9-\dfrac{27}{x+3}$

$$\therefore \int\frac{x^3}{x+3}dx=\int(x^2-3x+9-\frac{27}{x+3})dx=\int(x^2-3x+9)dx-\int\frac{27}{x+3}dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C.$$

★★★(2) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$

思路：被积函数为假分式，先将被积函数分解为一个整式加上一个真分式的形式，然后分项积分。

解：$\because \dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-x}=\dfrac{(x^5-x^3)+(x^4-x^2)+(x^3-x)+x^2+x-8}{x^3-x}=x^2+x+1+\dfrac{x^2+x-8}{x^3-x}$,

而 $x^3-x=x(x+1)(x-1)$,

令 $\dfrac{x^2+x-8}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-1}$，等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$\begin{cases}A+B+C=1\\C-B=1\\A=8\end{cases}$ 解此方程组得：$\begin{cases}A=8\\B=-4\\C=-3\end{cases}$

$$\therefore \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}=x^2+x+1+\frac{8}{x}-\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1}$$
$$\therefore \int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx=\int(x^2+x+1+\frac{8}{x}-\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1})dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C$$

★★★(3) $\displaystyle\int\frac{3}{x^3+1}dx$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$，令 $\dfrac{3}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ 等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$\begin{cases}A+B=0\\B+C-A=0\\A+C=3\end{cases}$ 解此方程组得：$\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=2\end{cases}$

$$\therefore \frac{3}{x^3+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{\frac{1}{2}(2x-1)}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$\therefore \int\frac{3}{x^3+1}dx=\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}d((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})+\sqrt{3}\int\frac{1}{(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})^2+1}d(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+C.$$

★★★(4) $\int\frac{x+1}{(x-1)^3}dx$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：令 $\frac{x+1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$，等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$A=0$， $B-2A=1$， $A-B+C=1$，解此方程组得：$A=0$， $B=1$， $C=2$ 。

$$\therefore \frac{x+1}{(x-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$\therefore \int\frac{x+1}{(x-1)^3}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{2}{(x-1)^3}dx=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C=-\frac{x}{(x-1)^2}+C$$

★★★(5) $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because \dfrac{3x+2}{x(x+1)^3}=\dfrac{3}{(x+1)^3}+\dfrac{2}{x(x+1)^3}$，令 $\dfrac{2}{x(x+1)^3}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}+\dfrac{D}{(x+1)^3}$

等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 3A+B+C+D=0 \\ A=2 \end{cases} \text{解此方程组得：} \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=-2 \\ D=-2 \end{cases}。$$

$$\therefore \frac{2}{x(x+1)^3}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\therefore \frac{3x+2}{x(x+1)^3}=\frac{3}{(x+1)^3}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx=\int\frac{1}{(x+1)^3}dx-\int\frac{2}{(x+1)^2}dx-\int\frac{2}{x+1}dx+\int\frac{2}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}-2\ln|x+1|+2\ln|x|+C$$

$$=2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+C.$$

★★★(6) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)^2}$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because \dfrac{x}{(x+2)(x+3)^2}=\dfrac{x+2-2}{(x+2)(x+3)^2}=\dfrac{x+2}{(x+2)(x+3)^2}-\dfrac{2}{(x+2)(x+3)^2}$

$=\dfrac{1}{(x+3)^2}-\dfrac{2}{(x+2)(x+3)^2}$；令 $\dfrac{2}{(x+2)(x+3)^2}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{(x+3)^2}$，等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 6A+5B+C=0 \\ 9A+6B+2C=2 \end{cases} \text{解此方程组得：} \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=-2 \end{cases} \therefore \frac{2}{(x+2)(x+3)^2}=\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+3}-\frac{2}{(x+3)^2}$$

$$\therefore \frac{x}{(x+2)(x+3)^2}=\frac{1}{(x+3)^2}-\left(\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+3}-\frac{2}{(x+3)^2}\right)=\frac{3}{(x+3)^2}-\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x+3}$$

$$\therefore \int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)^2}=\int\frac{3}{(x+3)^2}dx-\int\frac{2}{x+2}dx+\int\frac{2}{x+3}dx$$

$$=-\frac{3}{x+3}-2\ln|x+2|+2\ln|x+3|+C=\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2-\frac{3}{x+3}+C.$$

★★★(7) $\int \frac{3x}{x^3-1}dx$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because \frac{3x}{x^3-1}=\frac{3(x-1)+3}{x^3-1}=\frac{3}{x^2+x+1}+\frac{3}{x^3-1}$

令 $\frac{3}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$，等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=3 \end{cases} \quad \text{解此方程组得：} \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{3}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x-2}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

而 $\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}=\frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1}=\frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1}$

$$\therefore \int \frac{3x}{x^3-1}dx=\int \frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx+\int \frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx$$

$$=\sqrt{3}\int \frac{1}{(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})^2+1}d(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}d(x^2+x+1)$$

$$=\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+C$$

$$=\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+C$$

★★★(8) $\int \frac{1-x-x^2}{(x^2+1)^2}dx$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because \frac{1-x-x^2}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{2}{(x^2+1)^2}$

$$\therefore \int \frac{1-x-x^2}{(x^2+1)^2}dx = -\int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx + 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$
$$= -\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}d(x^2+1) + 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

又由分部积分法可知：$2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}dx$

$$\therefore \int \frac{1-x-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + C = \frac{1}{2}(\frac{2x+1}{x^2+1}) + C$$

★★★(9) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x+3-3}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

令 $\frac{3}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$，

等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=3 \end{cases}$ 解之得：$\begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=-3 \\ C=\frac{3}{2} \end{cases}$ $\therefore \frac{3}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{3}{2}}{x+1} - \frac{3}{x+2} + \frac{\frac{3}{2}}{x+3}$

而 $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

$$\therefore \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{\frac{3}{2}}{x+3}$$
$$\therefore \int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + 2\int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+3}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

★★★(10) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{x^2-1+2}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2(x-1)}$

令 $\dfrac{2}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$，等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$A+B=0$，$2A+C=0$，$A-B-C=2$；解之得：$A=\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{2}$，$C=-1$。

$$\therefore \frac{2}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C \quad =\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

★★★(11) $\displaystyle\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：令 $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$$\begin{cases}A+B=0\\ C=0\\ A=1\end{cases} \text{解之得：}\begin{cases}A=1\\ B=-1\\ C=0\end{cases} \therefore \frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

$$\therefore \int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

★★★(12) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because \dfrac{1}{(x^2+x)(x^2+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)(x^2+1)}$

令$\dfrac{1}{(x^2+x)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$，等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$A+B+C=0,\quad A+C+D=0,\quad A+B+D=0,\quad A=1$，解之得：

$A=1,\quad B=-\dfrac{1}{2},\quad C=-\dfrac{1}{2},\quad D=-\dfrac{1}{2}.$

$$\therefore \frac{1}{(x^2+x)(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\therefore \frac{1}{(x^2+x)(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

$$\therefore \int\frac{dx}{(x^2+x)(x^2+1)}=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

★★★★★(13) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because x^4+1=(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$

令$\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1-\sqrt{2}x}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1+\sqrt{2}x}$，等式右边通分后比较两边分子 x 的同次项的系数得：

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases}\text{解之得：}\begin{cases} A=-\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ B=\dfrac{1}{2} \\ C=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ D=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{x^4+1}=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}x-2}{x^2+1-\sqrt{2}x}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+1+\sqrt{2}x}=-\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{(2x-\sqrt{2})-\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{(2x+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}[\frac{(2x+\sqrt{2})}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}-\frac{(2x-\sqrt{2})}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}]+\frac{1}{4}[\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}]$$

$$\therefore \int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{8}\int[\frac{(2x+\sqrt{2})}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}-\frac{(2x-\sqrt{2})}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}]dx+\frac{1}{4}\int[\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}]dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}[\int\frac{(2x+\sqrt{2})}{x^2+1+\sqrt{2}x}dx-\int\frac{(2x-\sqrt{2})}{x^2+1-\sqrt{2}x}dx]+\frac{1}{4}[\int\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx+\int\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}[\int\frac{1}{x^2+1+\sqrt{2}x}d(x^2+1+\sqrt{2}x)-\int\frac{1}{x^2+1-\sqrt{2}x}d(x^2+1-\sqrt{2}x)]$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}[\int\frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}d(\sqrt{2}x+1)+\int\frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}d(\sqrt{2}x-1)]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)]+C$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}(\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2})+C.$$

注：由导数的性质可证 $\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)=\arctan\dfrac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$

本题的另一种解法：

$$\because \frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2}[\frac{x^2+1}{x^4+1}-\frac{x^2-1}{x^4+1}]$$

$$\therefore \int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}[\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx]=\frac{1}{2}[\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx]$$

$$=\frac{1}{2}[\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}d(x-\frac{1}{x})-\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}d(x+\frac{1}{x})]$$

$$=\frac{1}{2}[\int\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}d(x-\frac{1}{x})-\int\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2}d(x+\frac{1}{x})]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1}{(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}})^2+1}d(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}})-\frac{\sqrt{2}}{8}[\int(\frac{1}{(x+\frac{1}{x})-\sqrt{2}}-\frac{1}{(x+\frac{1}{x})+\sqrt{2}})d(x+\frac{1}{x})]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1}{1+(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x})^2}d(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x})-\frac{\sqrt{2}}{8}[\int\frac{1}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}d(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2})$$

$$-\int\frac{1}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}d(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2})]=\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}(\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2})+C.$$

注：由导数的性质可证 $\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}=\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$。

★★★★★(14) $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx$

思路：将被积函数裂项后分项积分。

解：$\because \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{x^2+x+1-x+1}{(x^2+x+1)^2}$

$$=-\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\therefore\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx=-\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$=-\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}d(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$=-\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}d(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{d(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}d(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

又$\because\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{x^2+x+1}$

$$=\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+C$$

$$\therefore\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx=-\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})-\frac{x+1}{x^2+x+1}+C.$$

注：本题再推到过程中用到如下性质：（本性质可由分部积分法导出。）

若记 $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$，其中 n 为正整数，$a\neq 0$，则必有：

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}]。$$

2、 求下列不定积分

知识点：三角有理函数积分和简单的无理函数积分法的练习。

思路分析：求这两种积分的基本思路都是通过适当的变换化为有理函数积分去完成。

★★(1) $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$

思路：分子分母同除以 $\sin^2 x$ 变为 $\csc^2 x$ 后凑微分。

解：$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{\csc^2 x dx}{3\csc^2 x+1} = -\int \frac{d\cot x}{3\cot^2 x+4} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\int \frac{d(\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x)^2+1}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x)+C = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x)+C.$

★★(2) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$

思路：万能代换！

解：令$t=\tan\frac{x}{2}$，则$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

$\therefore \int \frac{dx}{3+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$

$\therefore \int \frac{dx}{3+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2})+C.$

注：另一种解法是：

$\int \frac{dx}{3+\cos x} = \int \frac{dx}{3+2\cos^2\frac{x}{2}-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}+1}dx$

$\int \frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+2}d\tan\frac{x}{2} = \int \frac{1}{(\tan\frac{x}{2})^2+(\sqrt{2})^2}d\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2})+C.$

★★(3) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

思路：万能代换！

解：令$t=\tan\frac{x}{2}$，则$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2};$

$\therefore \int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})}{1+(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})+C$

$$\therefore \int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

★★(4) $\int \frac{dx}{1+\tan x}$

思路：利用变换 $t = \tan x$！（万能代换也可，但较繁！）

解：令 $t = \tan x$，则 $x = \arctan t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$;

$$\therefore \int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+t} = \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

$$\because \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-1}{1+t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right)$$

$$\therefore \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+t}dt - \int \frac{t}{1+t^2}dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t\right] + C$$

$$\therefore \int \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{1}{2}\left[\ln|1+\tan x| - \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x) + x\right] + C.$$

★★(5) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

思路：万能代换！

解：令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$;

$$\therefore \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

★★(6) $\int \frac{dx}{5+2\sin x-\cos x}$

思路：万能代换！

解：令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$;

$$\therefore \int \frac{dx}{5+2\sin x-\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{3t^2+2t+2}$$

而 $$\int \frac{dt}{3t^2+2t+2}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{3})^2+(\frac{\sqrt{5}}{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d(\frac{3t+1}{\sqrt{5}})}{(\frac{3t+1}{\sqrt{5}})^2+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{3t+1}{\sqrt{5}})+C$$

$$\therefore \int \frac{dx}{5+2\sin x-\cos x}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}})+C.$$

★★★★(7) $\int \frac{dx}{(5+4\sin x)\cos x}$

思路一：万能代换！

解：令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2};$

$$\therefore \frac{dx}{(5+4\sin x)\cos x}=\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{(5+4\frac{2t}{1+t^2})\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2(1+t^2)dt}{(5t^2+8t+5)(1-t^2)}$$

$$=-(\frac{2}{5t^2+8t+5}+\frac{4}{(5t^2+8t+5)(t^2-1)})dt$$

而 $\frac{4}{(5t^2+8t+5)(t^2-1)}=\frac{4}{(5t^2+8t+5)(t-1)(t+1)}$，

令 $\frac{4}{(5t^2+8t+5)(t-1)(t+1)}=\frac{At+B}{5t^2+8t+5}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{t+1}$，等式右边通分后比较两边分子 t 的同次项的系数得：

$$\begin{cases} A+5C+5D=0 \\ B+13C+3D=0 \\ -A+13C-3D=0 \\ B+5C-5D=4 \end{cases}$$ 解之得：$$\begin{cases} A=\frac{5}{2} \\ B=\frac{7}{8} \end{cases},\quad \begin{cases} C=\frac{1}{16} \\ D=-\frac{9}{16} \end{cases};$$

$$\therefore \frac{4}{(5t^2+8t+5)(t-1)(t+1)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{20t+7}{5t^2+8t+5}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{t+1}$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10t+8}{5t^2+8t+5}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{5t^2+8t+5}$$

$$\therefore\frac{dx}{(5+4\sin x)\cos x}=(-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{10t+8}{5t^2+8t+5}-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{5t^2+8t+5})\,dt$$

$$\therefore\int\frac{dx}{(5+4\sin x)\cos x}=-\frac{1}{16}\int\frac{1}{t-1}dt+\frac{9}{16}\int\frac{1}{t+1}dt-\frac{1}{4}\int\frac{10t+8}{5t^2+8t+5}dt-\frac{7}{8}\int\frac{1}{5t^2+8t+5}dt$$

$$=-\frac{1}{16}\ln|t-1|+\frac{9}{16}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\ln(5t^2+8t+5)-\frac{7}{24}\arctan(\frac{5t+4}{3})+C$$

$$=-\frac{1}{16}\ln\left|\tan\frac{x}{2}-1\right|+\frac{9}{16}\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|-\frac{1}{4}\ln(5\tan^2\frac{x}{2}+8\tan\frac{x}{2}+5)-\frac{7}{24}\arctan(\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3})+C$$

思路二：利用代换$t=\sin x$！

解：令$t=\sin x,|x|<\frac{\pi}{2}$，则$dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\cos x=\sqrt{1-t^2}$

$$\therefore\int\frac{dx}{(5+4\sin x)\cos x}=\int\frac{\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{(5+4t)\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{(5+4t)(1-t^2)}=-\int\frac{dt}{(5+4t)(t^2-1)}$$

$$\because\frac{1}{(5+4t)(t^2-1)}=\frac{1}{(5+4t)(t-1)(t+1)}$$

令$\frac{1}{(5+4t)(t^2-1)}=\frac{A}{5+4t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}$，等式右边通分后比较两边分子 t 的同次项的系数得：

$$\begin{cases}A+4B+4C=0\\9B+C=0\\-A+5B-5C=1\end{cases}\quad\text{解之得:}\begin{cases}A=\frac{16}{9}\\B=\frac{1}{18}\\C=-\frac{1}{2}\end{cases}\quad\therefore\frac{1}{(5+4t)(t^2-1)}=\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{5+4t}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}$$

$$\therefore\int\frac{dt}{(5+4t)(t^2-1)}=\frac{16}{9}\int\frac{1}{5+4t}dt+\frac{1}{18}\int\frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}dt$$

$$=\frac{4}{9}\ln|5+4t|+\frac{1}{18}\ln|1-t|-\frac{1}{2}\ln|1+t|-C$$

$$\therefore\int\frac{dx}{(5+4\sin x)\cos x}=-\frac{4}{9}\ln|5+4\sin x|-\frac{1}{18}\ln|1-\sin x|+\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|+C.$$

注：比较上述两解法可以看出应用万能代换对某些题目可能并不简单！

★★★★(8) $\int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx$

思路：将被积函数分项得，对两个不定积分分别利用代换$t=\cos x$和万能代换！

解：$\because \dfrac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}=\dfrac{1}{(1+\cos x)\sin x}+\dfrac{1}{1+\cos x}$

$$\therefore \int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx=\int\frac{1}{(1+\cos x)\sin x}dx+\int\frac{1}{1+\cos x}dx$$

对积分$\displaystyle\int\frac{1}{(1+\cos x)\sin x}dx$，令$t=\cos x, x\in(0,\pi)$，则$dx=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\sin x=\sqrt{1-t^2}$;

$$\therefore \int\frac{1}{(1+\cos x)\sin x}dx=\int\frac{-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{(1+t)(t^2-1)}=\int\frac{dt}{(1+t)^2(t-1)}$$

令$\dfrac{1}{(1+t)^2(t-1)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{1+t}+\dfrac{C}{(1+t)^2}$，等式右边通分后比较两边分子t的同次项的系数得：

$$\begin{cases}A+B=0\\2A+C=0\\A-B-C=1\end{cases}\text{解之得：}\begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\B=-\dfrac{1}{4}\\C=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad\therefore \frac{1}{(1+t)^2(t-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}$$

$$\therefore \int\frac{1}{(1+t)^2(t-1)}dt=\frac{1}{4}\int\frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+t}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+t)^2}dt$$
$$=\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}+C_1$$

$$\therefore \int\frac{1}{(1+\cos x)\sin x}dx=\frac{1}{4}\ln|1-\cos x|-\frac{1}{4}\ln|1+\cos x|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}+C_1;$$

对积分$\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}dx$，令$t=\tan\dfrac{x}{2},\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\therefore \int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int dt=t+C_2=\tan\frac{x}{2}+C_2;$$

$$\therefore \int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx=\frac{1}{4}\ln|1-\cos x|-\frac{1}{4}\ln|1+\cos x|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}+\tan\frac{x}{2}+C_3$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+C.$$

★★(9) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

思路：变无理式为有理式，变量替换 $t=\sqrt[3]{1+x}$ 。

解：令 $t=\sqrt[3]{1+x}$，则 $1+x=t^3, dx=3t^2dt$;

$$\therefore \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\int \frac{3t^2dt}{1+t}=3\int \frac{t^2dt}{1+t}=3\int (t-1)dt+3\int \frac{1}{1+t}dt=\frac{3}{2}t^2-3t+3\ln|t+1|+C$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2}-3\sqrt[3]{1+x}+3\ln\left|\sqrt[3]{1+x}+1\right|+C.$$

★★(10) $\int \frac{1+(\sqrt{x})^3}{1+\sqrt{x}}dx$

思路：变无理式为有理式，变量替换 $t=\sqrt{x}$ 。

解：令 $t=\sqrt{x}$，$x=t^2, dx=2tdt$;

$$\therefore \int \frac{1+(\sqrt{x})^3}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{1+(t)^3}{1+t}2tdt=2\int (t^2-t+1)tdt=2\int (t^3-t^2+t)dt$$
$$=\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^3+t^2+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C.$$

★★(11) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{1+\sqrt{x+1}}dx$

思路：变无理式为有理式，变量替换 $t=\sqrt{x+1}$ 。

解：令 $t=\sqrt{x+1}$，则 $x+1=t^2, dx=2tdt$;

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{t-1}{1+t}2tdt=2\int \frac{t^2-t}{1+t}dt=2\int \frac{t^2-t}{1+t}dt=2\int (t-2+\frac{2}{1+t})dt$$
$$=2\int tdt-4\int dt+4\int \frac{1}{1+t}dt=t^2-4t+4\ln|t+1|+C=x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C$$

★★★(12) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$

思路：变无理式为有理式，变量替换 $t=\sqrt[8]{x}$ 。

解：令 $t=\sqrt[8]{x}, x=t^8, dx=8t^7dt$;

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} = \int \frac{8t^7}{t^2+t^4}dt = 8\int \frac{t^5}{1+t^2}dt = 8\int \frac{t^5+t^3-t^3-t+t}{1+t^2}dt = 8\int (t^3-t+\frac{t}{1+t^2})dt$$

$$= 2t^4-4t^2+4\ln(1+t^2)+C = 2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$$

★★★(13) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$

思路：变无理式为有理式，三角换元。

解：令 $x=\tan t, |t|<\frac{\pi}{2}$, 则 $dx=\sec^2 tdt$.

$$\therefore \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\tan^3 t}{\sec t}\sec^2 tdt = \int \tan^3 t\sec tdt = \int \tan^2 td\sec t = \int (\sec^2 t-1)d\sec t$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 t-\sec t+C = \frac{1}{3}\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}+C.$$

★★★(14) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

思路：将被积函数 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ 变形为 $\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 后，三角换元。

解：令 $x=a\sin t, |t|<\frac{\pi}{2}$; 则 $dx=a\cos tdt$ ；

$$\therefore \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{a+a\sin t}{a\cos t}a\cos tdt = a\int (1+\sin t)dt$$

$$= at-a\cos t+C = a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

注： 另一种解法，分项后凑微分。

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= \int \frac{a}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}d(a^2-x^2) = a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$$

★★★(15) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

思路：换元。

解：令 $\frac{x+1}{x-1}=t$，则 $\frac{-2}{(x-1)^2}dx=dt.$

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})^2(x-1)^2}}=\int\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}(-\frac{1}{2})dt=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{2}{3}}dt=-\frac{3}{2}t^{\frac{1}{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

总习题四

★1、设 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x}，则 $f(x)=($　　$).$

(A) e^{-2x}　　　(B) -2 e^{-2x}　　　(C) -4 e^{-2x}　　　(D) 4 e^{-2x}

知识点： 原函数的定义考察。

思路分析：略。

解：(B)。

★2、设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{dx}{f(x)}=$____________。

知识点： 原函数的定义性质考察。

思路分析：对条件两边求导数后解出 $f(x)$ 后代入到要求的表达式中，积分即可。

解：对式子 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$ 两边求导数得：

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\therefore f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\therefore\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2};$$

$$\therefore\int\frac{dx}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx^2=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$$

★★3、设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f(\varphi(x))=\ln x$，求 $\int\varphi(x)dx$ 。

知识点： 函数的定义考察。

思路分析：求出 $f(x)$ 后解得 $\varphi(x)$，积分即可。

解： $\because f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}=\ln\dfrac{x^2-1+1}{x^2-1-1},\therefore f(t)=\ln\dfrac{t+1}{t-1},\therefore f(\varphi(x))=\ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1},$

又$\because f(\varphi(x))=\ln x,\therefore \dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x,\therefore \varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1};$

$\therefore \int\varphi(x)dx=\int\dfrac{x+1}{x-1}dx=\int(1+\dfrac{2}{x-1})dx=x+2\ln|x-1|+C$

★★★4、设$\mathrm{F}(x)$为$f(x)$的原函数，当$x>0$时，有$f(x)\mathrm{F}(x)=\sin^2 2x$，且$F(0)=1$， $F(x)\geq 0$

试求$f(x)$。

知识点： 原函数的定义性质考察。

思路分析：注意到$dF(x)=f(x)dx$，先求出$F(x)$，再求$f(x)$ 即可。

解： $\because f(x)F(x)=\sin^2 2x;\therefore \int f(x)F(x)dx=\int\sin^2 2xdx$

即$\int F(x)dF(x)=\int\sin^2 2xdx,\ \therefore \dfrac{1}{2}(F(x))^2=\int\sin^2 2xdx,$

$\therefore (F(x))^2=2\int\sin^2 2xdx=\int(1-\cos 4x)dx=x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+C;$

又$F(0)=1,\therefore C=1;\therefore (F(x))^2=x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+1;(x>0.)$

又$F(x)>0,\therefore F(x)=\sqrt{x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+1},$

又$f(x)F(x)=\sin^2 2x,\therefore f(x)=\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt{x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+1}}$。

5、求下列不定积分。

知识点： 求不定积分的综合考察。

思路分析：具体问题具体分析。

★★(1) $\int x\sqrt{2-5x}dx$

思路：变无理式为有理式，变量替换$t=\sqrt{2-5x}$。

解： 令$t=\sqrt{2-5x}$，则$x=\dfrac{2-t^2}{5},dx=-\dfrac{2t}{5}dt,$

$$\therefore \int x\sqrt{2-5x}dx=\int \frac{2-t^2}{5}t\cdot(-\frac{2t}{5}dt)=-\frac{2}{25}\int(2t^2-t^4)dt=-\frac{2}{25}(\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5)+C$$

$$=-\frac{4}{75}\sqrt{(2-5x)^3}+\frac{2}{125}\sqrt{(2-5x)^5}+C=-\frac{30x+8}{375}\sqrt{(2-5x)^3}+C.$$

★(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}(x>1)$

思路：变无理式为有理式，变量替换 $x=\sec t$ 。

解：令 $x=\sec t, 0<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\sec t\tan t dt$ 。

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}dt=\int dt=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$$

★★★(3) $\int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}dx$

思路：将被积函数 $\frac{2^x3^x}{9^x-4^x}$ 变为 $\frac{\frac{2^x}{3^x}}{1-(\frac{2^x}{3^x})^2}=\frac{(\frac{2}{3})^x}{1-[(\frac{2}{3})^x]^2}$ 后换元或凑微分。

解：令 $t=(\frac{2}{3})^x$，则 $dt=(\frac{2}{3})^x\ln\frac{2}{3}dx$ 。

$$\therefore \int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}dx=\int \frac{(\frac{2}{3})^x}{1-[(\frac{2}{3})^x]^2}dx=\frac{1}{\ln 2-\ln 3}\int \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt$$

$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{(\frac{2}{3})^x-1}{(\frac{2}{3})^x+1}\right|+C.$$

$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$$

★★(4) $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}dx(a>0)$

思路：凑微分。

解：$\because \int \frac{x^2}{a^6-x^6}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{a^6-x^6}dx^3=\frac{1}{3}\int \frac{1}{a^6-(x^3)^2}dx^3$，令 $t=x^3$，

$$\therefore \int \frac{x^2}{a^6-x^6}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{(a^3)^2-t^2}dt=-\frac{1}{6a^3}\int (\frac{1}{t-a^3}-\frac{1}{t+a^3})dt=-\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{t-a^3}{t+a^3}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{x^3-a^3}{x^3+a^3}\right|+C=\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{x^3+a^3}{x^3-a^3}\right|+C.$$

★★(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

思路：将被积函数进行配方后换元或先凑微分再换元。

解：方法一：$\because \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}$

令 $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t, 0<t<\frac{\pi}{2},$，则 $dx=\frac{1}{2}\sec t\tan t dt;$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=\int \frac{\frac{1}{2}\sec t\tan t}{\frac{1}{2}\tan t}dt=\int \sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right|+C.$$

方法二：$\because \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}=2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$

令 $t=\sqrt{x}, \therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};$

再令 $t=\tan z, |z|<\frac{\pi}{2}$，则 $dt=\sec^2 z dz,$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int \frac{\sec^2 z}{\sec z}dz=2\int \sec z dz=2\ln|\sec z+\tan z|+C$$

$$=2\ln\left|\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right|+C=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right|+C.$$

★★★(6) $\int \frac{dx}{x(2+x^{10})}$

思路：倒代换！

解：令 $x=\frac{1}{t},$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\therefore \int \frac{dx}{x(2+x^{10})} = \int \frac{t}{2+\frac{1}{t^{10}}}(-\frac{1}{t^2}dt) = -\int \frac{t^9}{2t^{10}+1}dt = -\frac{1}{10}\int \frac{dt^{10}}{2t^{10}+1} = -\frac{1}{20}\int \frac{d(2t^{10}+1)}{2t^{10}+1}$$

$$= -\frac{1}{20}\ln(2t^{10}+1) + C = \frac{1}{20}\ln(\frac{x^{10}}{x^{10}+2}) + C.$$

★★★★(7) $\int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x}dx$

思路：大凡被积函数的分子分母皆为同一个角的正余弦函数的线性组合的形式的积分，一般思路是将被积函数的分子写成分母和分母的导数的线性组合的形式，然后分项分别积分即可。

解：$\because 7\cos x - 3\sin x = 5\cos x + 2\sin x + (5\cos x + 2\sin x)'$

$$\therefore \int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x}dx = \int \frac{5\cos x + 2\sin x + (5\cos x + 2\sin x)'}{5\cos x + 2\sin x}dx$$

$$= \int [1 + \frac{(5\cos x + 2\sin x)'}{5\cos x + 2\sin x}]dx = \int dx + \int \frac{d(5\cos x + 2\sin x)}{5\cos x + 2\sin x}$$

$$= \int dx + \int \frac{d(5\cos x + 2\sin x)}{5\cos x + 2\sin x} = x + \ln|5\cos x + 2\sin x| + C.$$

★★★★(8) $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$

思路：分项积分后对前一积分采用分部积分，后一积分不动。

解：$\because \int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx = \int (\frac{e^x}{1+\cos x} + \frac{e^x\sin x}{1+\cos x})dx = \int (\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}} + e^x\tan\frac{x}{2})dx$

$$= \int \frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx + \int e^x\tan\frac{x}{2}dx = \int e^x\sec^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2} + \int e^x\tan\frac{x}{2}dx$$

$$= \int e^x d\tan\frac{x}{2} + \int e^x\tan\frac{x}{2}dx = e^x\tan\frac{x}{2} - \int e^x\tan\frac{x}{2}dx + \int e^x\tan\frac{x}{2}dx$$

$$= e^x\tan\frac{x}{2} + C.$$

★★★★6、求不定积分：$\int [\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx$

知识点： 分部积分法考察兼顾凑微分的灵活性。

思路分析：分项后，第二个积分显然可凑现成的微分，分部积分第二个积分，第一个积分不动，合并同种积分，出现循环后解出加一个任意常数即可。

解： $\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}dx-\int\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx$

而 $\int\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx=\int\frac{f^2(x)}{f'^3(x)}df'(x)=\frac{f^2(x)}{f'^3(x)}f'(x)-\int f'(x)d(\frac{f^2(x)}{f'^3(x)})$

$$=\frac{f^2(x)}{f'^2(x)}-\int f'(x)\frac{2f(x)f'^4(x)-3f'^5(x)f''(x)f^2(x)}{f'^6(x)}dx$$

$$=\frac{f^2(x)}{f'^2(x)}-2\int\frac{f(x)}{f'(x)}dx+3\int\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx$$

$\therefore\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx=-\frac{f^2(x)}{f'^2(x)}+3\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx$

$\therefore\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx=\frac{1}{2}\frac{f^2(x)}{f'^2(x)}+C.$

★★★★7、设 $I_n=\int\tan^n xdx,(n>1)$，求证：$I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$,，并求 $\int\tan^5 xdx$。

知识点： 分部积分法考察，三角恒等式的应用，凑微分等。

思路分析：由要证明的目标式子可知，应将 $\tan^n x$ 分解成 $\tan^{n-2}x\tan^2 x$，进而写成 $\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)$，分部积分后即可得到 I_{n-2}。

证明： $I_n=\int\tan^n xdx=\int\tan^{n-2}x\tan^2 xdx=\int\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx$

$$=\int\tan^{n-2}xd\tan x-\int\tan^{n-2}xdx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}\text{。}$$

$\therefore\int\tan^5 xdx=I_5=\frac{1}{4}\tan^4 x-I_3=\frac{1}{4}\tan^4 x-(\frac{1}{2}\tan^2 x-I_1)$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\int\tan xdx=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$$

★★★8、$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=(B).$

思路： 化无理式为有理式，三交换元。

解： $\because \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$，令 $x=\sin t,|t|<\dfrac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos tdt$。

$$\therefore \int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1+\sin t}{\cos t}\cos tdt=\int(1+\sin t)dt=t-\cos t+C$$

$$=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

★★★9、设不定积分 $\mathrm{I}_1=\int\dfrac{1+x}{x(1+xe^x)}dx$，若 $u=xe^x$，则有 (D)。

思路： $u=xe^x$**，** 提示我们将被积函数的分子分母同乘以 e^x 后再积分。

解： $\because \mathrm{I}_1=\int\dfrac{1+x}{x(1+xe^x)}dx=\int\dfrac{e^x(1+x)}{e^x x(1+xe^x)}dx$

又 $\because du=(e^x+xe^x)dx=e^x(1+x)dx;$

$\therefore \mathrm{I}_1=\int\dfrac{du}{u(1+u)}=I_2$，选 (D)。

10、求下列不定积分：

知识点： 求无理函数的不定积分的综合考察。

思路分析： 基本思路——将被积函数化为有理式。

★★★★(1)、$\int\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}.$

思路： 先进行倒代换，在进行三角换元 。

解： 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$。

$$\therefore \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}=\int\frac{t}{\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}}(-\frac{1}{t^2}dt)=-\int\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{1+t^4}}$$

令 $t^2=\tan u,0<u<\dfrac{\pi}{2}$，则 $dt^2=\sec^2 udu$。

$$\therefore \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{1+t^4}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 udu}{\sec u}=-\frac{1}{2}\int\sec udu$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|\sec u+\tan u|+C=-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+t^4}+t^2)+C=\frac{1}{2}\ln(\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^4}})+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2})+C$$

★★★(2)、$\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$

思路：进行三角换元，化无理式为有理式。

解：令 $x=\sec t, 0<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\sec t\tan t dt,$

$$\therefore\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1+\sec t}{\sec^2 t\tan t}\sec t\tan t dt=\int\frac{1+\sec t}{\sec t}dt=\int(\cos t+1)dt$$

$$=t+\sin t+C=\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

注： $(\arccos\frac{1}{x})'=(-\arcsin\frac{1}{x})'$

★★★(3)、$\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx.$

思路：进行三角换元，化无理式为有理式。

解：令 $x=\sin t, 0<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos t dt$;

$$\therefore\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin t+2}{\sin^2 t\cos t}\cos t dt=\int(\frac{1}{\sin t}+\frac{2}{\sin^2 t})dt=\int\csc t dt+2\int\csc^2 t dt$$

$$=\ln\left|\csc t-\cot t\right|-2\cot t+C=\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

★★★★★(4)、$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

思路：进行三角换元，化无理式为有理式。

解：令 $x=\sin t, 0<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos t dt$;

$$\therefore\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t dt}{(1+\sin^2 t)\cos t}=\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}=\int\frac{dt}{\cos^2 t+2\sin^2 t}=\int\frac{\sec^2 t dt}{1+2\tan^2 t}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d(\sqrt{2}\tan t)}{1+(\sqrt{2}\tan t)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}})+C.$$

★★★(5)、$\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}.$

思路：进行三角换元，化无理式为有理式。

解：令 $x = 2\sin t, 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，则 $dx = 2\cos t dt$；

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos t dt}{2\sin t\, 2\cos t} = \int \frac{dt}{2\sin t} = \frac{1}{2}\int \csc t dt = \frac{1}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right| + C.$$

11、求下列不定积分：

知识点：较复杂的分部积分法的考察。

思路分析：基本思路——严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分。

★★★(1)、$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

思路：分部积分。

解：$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

★★(2)、$\int \ln(1+x^2)dx$

思路：分部积分。

解：$\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - \int \dfrac{2x^2}{1+x^2}dx = x\ln(1+x^2) - \int \dfrac{2(x^2+1)-2}{1+x^2}dx$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$$ 。

★★★★(3)、$\int x\tan x\sec^4 x dx$

思路：分部积分。

解：$\because \int x\tan x\sec^4 x dx = \int x\sec^3 x d\sec x = x\sec^4 x - \int \sec x(\sec^3 x$

$$+3x\sec^3 x\tan x)dx = x\sec^4 x - \int \sec^4 xdx - 3\int x\tan x\sec^4 xdx$$
$$= x\sec^4 x - \int (\tan^2 x+1)d\tan x - 3\int x\tan x\sec^4 xdx$$
$$= x\sec^4 x - \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x - 3\int x\tan x\sec^4 xdx$$
$$\therefore \int x\tan x\sec^4 xdx = \frac{1}{4}x\sec^4 x - \frac{1}{12}\tan^3 x - \frac{1}{4}\tan x + C.$$

★★★(4)、$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan xdx$

思路： 分项后分部积分。

解： $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan xdx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\arctan xdx = \int \arctan xdx - \int \frac{1}{1+x^2}\arctan xdx$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx - \int \arctan xd\arctan x$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$$

★★★★(5)、$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx$

思路： 分部积分后 倒代换。

解： $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx = \int \ln(1+x^2)d(-\frac{1}{2}x^{-2}) = -\frac{1}{2}x^{-2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\int \frac{x^{-2}}{1+x^2}2xdx$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2}\ln(1+x^2) + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

对于积分$\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$应用倒代换，令$x = \frac{1}{t}$，则$dx = -\frac{1}{t^2}dt$，

$$\therefore \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{t}{1+\frac{1}{t^2}}(-\frac{1}{t^2}dt) = -\int \frac{tdt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x^2}{x^2}) + C$$

$$\therefore \int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx = -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} - \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x^2}{x^2}) + C.$$

★★★(6)、$\int \frac{x}{1+\cos x}dx$

思路： 将被积函数变形后分部积分。

解： $\int \frac{x}{1+\cos x}dx = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}dx = \int x\sec^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2} = \int xd\tan\frac{x}{2}$

$= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}dx = x\tan\frac{x}{2} - 2\int \tan\frac{x}{2}d\frac{x}{2} = x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$

$= x\tan\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{1+\cos x}{2}\right| + C = x\tan\frac{x}{2} + \ln|1+\cos x| + C_1$。

★★★12、求不定积分：$I_n = \int x^n e^x dx, n$ 为自然数。

知识点： 较复杂的分部积分法的考察。

思路分析： 基本思路——严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分，推一个递推关系式。

解： $I_1 = xe^x - x + C$

$$I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n de^x = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= e^x(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots \\
&+ (-1)^k n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k} + \cdots + (-1)^{n-1}n!x) + (-1)^n n! I_0 \\
&= e^x(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots \\
&+ (-1)^k n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k} + \cdots + (-1)^{n-1}n!x) + (-1)^n n! e^x + C
\end{aligned}$$

★★★13、求不定积分：$\int (x^2 - 2x + 3)\cos 2x dx.$

知识点： 较复杂的分部积分法的考察。

思路分析： 基本思路——严格按照“反、对、幂、三、指”顺序凑微分，分项后分别积分。

解： $\int (x^2 - 2x + 3)\cos 2x dx = \int x^2\cos 2x dx - 2\int x\cos 2x dx + 3\int \cos 2x dx$

$$=\frac{1}{2}\int x^2 d\sin 2x-\int xd\sin 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xd2x$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\sin 2x-2\int x\sin 2x\mathrm{d}x)-(x\sin 2x-\int\sin 2xdx)+\frac{3}{2}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\sin 2x+\int xd\cos 2x)-(x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xd2x)+\frac{3}{2}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx-x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x-x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x+C$$

$$=(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{4})\sin 2x+(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})\cos 2x+C.$$

14、求下列不定积分：

知识点：求解较复杂的有理函数和无理函数的不定积分。

思路分析：基本思路——有理式分项、无理式化为有理式。

★★★★(1)、$\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$

思路：将被积函数化为一个整式加上一个真分式的形式，然后积分。

解：$\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}=\int(x^3-\frac{3x^7+2x^3}{x^8+3x^4+2})dx=\int x^3dx-\int\frac{3x^7+2x^3}{x^8+3x^4+2}dx$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}\int\frac{8x^7+12x^3-\frac{20}{3}x^3}{x^8+3x^4+2}dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}\int\frac{8x^7+12x^3}{x^8+3x^4+2}dx$$

$$+\frac{20}{8}\int\frac{x^3dx}{x^8+3x^4+2}=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}\int\frac{d(x^8+3x^4+2)}{x^8+3x^4+2}+\frac{5}{8}\int\frac{dx^4}{x^8+3x^4+2}$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}\int\frac{d(x^8+3x^4+2)}{x^8+3x^4+2}+\frac{5}{8}\int\frac{dx^4}{(x^4+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}\int\frac{d(x^8+3x^4+2)}{x^8+3x^4+2}+\frac{5}{8}\int\frac{d(x^4+\frac{3}{2})}{(x^4+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}\ln\left|x^8+3x^4+2\right|+\frac{5}{8}\ln\left|\frac{x^4+1}{x^4+2}\right|+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}\ln\left|(x^4+1)(x^4+2)\right|+\frac{5}{8}\ln\left|\frac{x^4+1}{x^4+2}\right|+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\ln\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2}\right)+C.$$

★★★★(2)、$\int\frac{1-x^8}{x(1+x^8)}dx$

思路：将被积函数化为一个整式加上一个真分式的形式，然后积分。

解：$\int\frac{1-x^8}{x(1+x^8)}dx=\int\frac{dx}{x(1+x^8)}-\int\frac{x^8}{x(1+x^8)}dx=\int\frac{dx}{x(1+x^8)}-\int\frac{x^7}{1+x^8}dx$

对$\int\frac{dx}{x(1+x^8)}$采用倒代换，令$x=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$。

$$\therefore\int\frac{dx}{x(1+x^8)}=\int\frac{t}{1+\frac{1}{t^8}}(-\frac{1}{t^2}dt)=-\int\frac{t^7}{1+t^8}dt=-\frac{1}{8}\int\frac{dt^8}{1+t^8}=-\frac{1}{8}\ln(1+t^8)+C_1$$

$$=-\frac{1}{8}\ln(\frac{1+x^8}{x^8})+C_1;$$

而$\int\frac{x^7}{1+x^8}dx=\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x^8}{1+x^8}=\frac{1}{8}\ln(1+x^8)+C_2$;

$$\therefore\int\frac{1-x^8}{x(1+x^8)}dx=-\frac{1}{8}\ln(\frac{1+x^8}{x^8})-\frac{1}{8}\ln(1+x^8)+C=\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^8)+C.$$

★★★★(3)、$\int\frac{x^3-2x+1}{(x-2)^{100}}dx$

思路：将被积函数分项后分部积分。

解：$\because x^3-2x+1=(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+5;$

$$\therefore\int\frac{x^3-2x+1}{(x-2)^{100}}dx=\int\frac{(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+5}{(x-2)^{100}}dx$$

$$=\int\frac{dx}{(x-2)^{97}}+6\int\frac{dx}{(x-2)^{98}}+10\int\frac{dx}{(x-2)^{99}}+5\int\frac{dx}{(x-2)^{100}}$$

$$=-\frac{1}{96(x-2)^{96}}-\frac{6}{97(x-2)^{97}}-\frac{5}{49(x-2)^{98}}-\frac{5}{99(x-2)^{99}}+C.$$

★★★(4)、$\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

思路： 将被积函数裂项分项后积分。

解： $\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{6}[\int \frac{dx^2}{x^2+1} - \int \frac{dx^2}{x^2+4}] = \frac{1}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4} + C.$

★★★★(5)、$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

思路： 将被积函数分项后积分。

解： 令 $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$，等式右边通分后比较等式两边分子上 x 的同次

幂项的系数得：$A+C=0, A+B+D=0, A+B+C=0, B+D=1$；

解之得：$A=-1, B=0, C=D=1.$

$$\therefore \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{-x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = -\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C.$$

★★★(6)、$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$

思路: 化无理式为有理式，第二类换元法。该题中欲同时去掉 $\sqrt[3]{x}$， $\sqrt{x}$， 应令 $t=\sqrt[6]{x}$ 。

解： 令 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $dx=6t^5dt;$

$$\therefore \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{t^2}{t^6(t^3+t^2)}6t^5dt = 6\int \frac{dt}{t(t+1)} = 6\int \frac{dt}{t} - 6\int \frac{dt}{t+1} = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = 6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C.$$

★★★★(7)、$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$

思路:分母有理化，换元。

解： $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx = \int \sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx = \int (x+1)\sqrt{x}dx - \int x\sqrt{x+1}dx$

对于积分$\int (x+1)\sqrt{x}dx$，令$t=\sqrt{x}$，则$dx = 2tdt;$

$$\therefore \int (x+1)\sqrt{x}dx = \int (t^2+1)t2tdt = 2\int (t^4+t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C_1$$

$$\therefore \int (x+1)\sqrt{x}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1$$

对于积分$\int x\sqrt{x+1}dx$，令$u=\sqrt{x+1}$，则$dx = 2udu;$

$$\therefore \int x\sqrt{x+1}dx = \int (u^2-1)u2udu = 2\int (u^4-u^2)du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + C_2$$

$$\therefore \int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{5}[-(x+1)^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{5}{2}}] + \frac{2}{3}[x^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}] + C.$$

★★★★★(8)、$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

思路：换元倒代换。

解：令$x-1=\frac{1}{t}$，则$dx = -\frac{1}{t^2}dt;$

（解题过程中涉及到开方，不妨设$t=\frac{1}{x\text{-}1}>0$，若小于零，不影响最后结果的形式。也就是：不论正负，结果都一样。）

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{t}{\sqrt{(\frac{1}{t}+1)^2-2}}(-\frac{1}{t^2}dt) = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = -\int \frac{d(\frac{t-1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{1-(\frac{t-1}{\sqrt{2}})^2}}$$

$$=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{\frac{1}{x-1}-1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)}+C.$$

★★★(9)、$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

解答详见习题 4-4 第 2 题的（15）题。

★★★★★(10)、$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

思路:“一路”换元。

解： $\because\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

令 $t=1+x^2$，则

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t+\sqrt{t^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t+t\sqrt{t}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1+\sqrt{t}}}=\int\frac{d\sqrt{t}}{\sqrt{1+\sqrt{t}}}$$

令 $u=\sqrt{t}$,则

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u}}=\int\frac{d(1+u)}{\sqrt{1+u}}=2\sqrt{1+u}+C=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$$

15、求下列不定积分:

知识点： 求解较复杂的三角函数有理式的不定积分。

思路分析：基本思路——三角代换等，具体问题具体分析。

★★★(1)、$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$

思路:万能代换。

解： 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $dx=\frac{2dt}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$

$$\therefore\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+t^2)dt}{t}=\frac{1}{4}[\int\frac{dt}{t}+\int tdt]$$

$$=\frac{1}{4}\ln|t|+\frac{1}{8}t^2+C=\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+C.$$

★★★(2)、$\int \frac{\tan\frac{x}{2}dx}{1+\sin x+\cos x}$

思路:万能代换。

解：令$t=\tan\frac{x}{2}$，则$dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$;

$$\therefore \int \frac{\tan\frac{x}{2}dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{t\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{tdt}{1+t}=\int dt-\int \frac{dt}{1+t}=t-\ln|1+t|+C$$

$$\therefore \int \frac{\tan\frac{x}{2}dx}{1+\sin x+\cos x}=\tan\frac{x}{2}-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

★★★★★(3)、$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$

思路:将被积函数的分子 1 变换一下，$1=\sin^2 x+\cos^2 x$。

解：$\because \frac{1}{\sin^3 x\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\cos x}{\sin^3 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}+\frac{\cos x}{\sin^3 x}$

$$=\tan x+\cot x+\csc^2 x\cot x=\tan x+\cot x+\csc^2 x\cot x$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\int(\tan x+\cot x+\csc^2 x\cot x)dx=\int \tan xdx+\int \cot xdx+\int \csc^2 x\cot xdx$$

$$=-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|-\int \csc xd\csc x=-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\csc^2 x+C$$

$$=\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\csc^2 x+C.$$

★★★★★(4)、$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

思路:注意到$\sin x\cos x=\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$,，而$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，此题易解。

解：$\because \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}$

$$\therefore \int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int \sin(x+\frac{\pi}{4})dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int \csc(x+\frac{\pi}{4})dx$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{4})+\cot(x+\frac{\pi}{4})\right|+C.$$

★★★★★(5)、$\int \sin x\sin 2x\sin 3xdx$

思路:将被积函数积化和差。

解：$\because \sin x\sin 3x=-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x)$

$$\therefore \int \sin x\sin 2x\sin 3xdx=-\frac{1}{2}\int (\cos 4x-\cos 2x)\sin 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int \cos 4x\sin 2xdx+\frac{1}{2}\int \cos 2x\sin 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int (2\cos^2 2x-1)\sin 2xdx+\frac{1}{4}\int \sin 4xdx$$

$$=-\int \cos^2 2x\sin 2xdx+\frac{1}{2}\int \sin 2xdx+\frac{1}{4}\int \sin 4xdx$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos^2 2xd\cos 2x+\frac{1}{4}\int \sin 2xd2x+\frac{1}{16}\int \sin 4xd4x$$

$$=\frac{1}{6}\cos^3 2x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+C.$$

注：另一种解法是：

$$\int \sin x\sin 2x\sin 3xdx=-\frac{1}{2}\int (\cos 4x-\cos 2x)\sin 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int \cos 4x\sin 2xdx+\frac{1}{2}\int \cos 2x\sin 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\sin 6x-\sin 2x)dx+\frac{1}{4}\int \sin 4xdx=\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+C.$$

★★★★★(6)、$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

思路:注意到被积函数的分子$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，分母$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$，易解。

解：$\because \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x,$

$$\therefore \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx=\int \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\cos^2 2x}d\ \cos 2x$$

$$=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C.$$

★★★★★(7)、、 $\frac{1}{2}\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx(0<r<1,-\pi<x<\pi)$

思路:万能代换。

解： 令$t=\tan\frac{x}{2}$，则$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，代入得:

$$\therefore \frac{1}{2}\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=\frac{1-r^2}{2}\int \frac{2dt}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)}$$

$$=\frac{1-r^2}{2}\int \frac{2dt}{(1+r)^2t^2+(r-1)^2}=\frac{1-r^2}{2}\int \frac{2dt}{(1+r)^2t^2+(r-1)^2}=-\int \frac{d(\frac{1+r}{r-1}t)}{(\frac{1+r}{r-1}t)^2+1}$$

$$=-\arctan(\frac{1+r}{r-1}t)+C=-\arctan(\frac{1+r}{r-1}\tan\frac{x}{2})+C.$$

★★★★★(8)、 $\int \frac{4\sin x+3\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$

思路:非常典型的解题思路----将被积函数的分子$4\sin x+3\cos x$表示成分母$\sin x+2\cos x$和分母的导数$\cos x-2\sin x$的线性组合的形式。

解： $\because 4\sin x+3\cos x=2(\sin x+2\cos x)-(\cos x-2\sin x)$

$$=2(\sin x+2\cos x)-(\sin x+2\cos x)'$$

$$\therefore \int \frac{4\sin x+3\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=\int \frac{2(\sin x+2\cos x)-(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}dx$$

$$=2\int dx-\int \frac{d(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}=2x-\ln\left|\sin x+2\cos x\right|+C.$$

★★★★16、求$\int \max\{1,|x|\}dx$

知识点： 被积函数表现为一个分段函数，则不定积分也表现为一个分段函数。

思路分析：基本思路——讨论。

解： $\because$当$|x|\le 1$时，$\max\{1,|x|\}=1$；而当$x<-1$时，$\max\{1,|x|\}=-x$；

当 $x>1$ 时，$\max\{1,|x|\}=x$；

$\therefore$ 当 $x<-1$ 时，$\int\max\{1,|x|\}dx=-\int xdx=-\dfrac{x^2}{2}+C_1$;

当 $|x|\le 1$ 时，$\int\max\{1,|x|\}dx=\int dx=x+C_2$;

当 $x>1$ 时，$\int\max\{1,|x|\}dx=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}+C_3$.

由 $\int\max\{1,|x|\}dx$ 的连续性可知：$C_2=C_1+\dfrac{1}{2}, C_3=C_2+\dfrac{1}{2}=C_1+1$, 设 $C_1=C$,

$$\therefore\int\max\{1,|x|\}dx=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C, & x<-1;\\ x+\dfrac{1}{2}+C, & |x|\le 1;\\ \dfrac{x^2}{2}+1+C, & x>1.\end{cases}$$

★★★★17、设 $y(x-y)^2=x$, 求 $\int\dfrac{dx}{x-3y}$

思路: 变量替换。

解： 令 $t=x-y$，则 $y=x-t, x=\dfrac{t^3}{t^2-1}; x-3y=\dfrac{t^3-3t}{t^2-1}; dx=\dfrac{t^4-3t^2}{(t^2-1)^2}dt$;

$$\therefore\int\frac{dx}{x-3y}=\int\frac{t}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-1)}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln|t^2-1|+C=\frac{1}{2}\ln|(x-y)^2-1|+C$$ 。

★★★★18、设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上，$c\in(a,b)$,又 $f(x)$ 在 $(a,b)\setminus\{c\}$ 连续，c 为 $f(x)$ 的第一类间断点，问 $f(x)$ 在 (a,b) 内是否存在原函数？为什么？

知识点： 考察对原函数定义的理解。

思路分析：反证法。

解证： 假设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，考察 $F(x)$ 在点 c 的导数，

$$\because\lim_{x\to c^-}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=f(c-0),\lim_{x\to c^+}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=f(c+0);$$

而 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{F(x)-F(c)}{x-c}=F'(c)=f(c),\therefore f(c-0)=f(c+0)=f(c)$

$\therefore f(x)$ 在点 c 连续，这与 c 为 $f(x)$ 的第一类间断点矛盾！

课外典型例题与习题解答

★★★1、$\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$

思路分析：此题属于有理函数的积分，且分母的次数大于分子的次数，可使用倒代换。下面的解答采用另一种方法，仔细体会，你会收获不小！

解：$\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^6(1+x^2)}dx = \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^4(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

★★★2、$\int \frac{x^5}{1+x}dx$

思路分析：此题属于有理函数的积分，且分子的次数大于分母的次数。经典的解法----将被积函数写成一个整式加上一个真分式的形式，然后分项积分。

解：$\because \frac{x^5}{1+x} = \frac{x^4(1+x)-x^4}{1+x} = x^4 - \frac{x^4}{1+x} = x^4 - \frac{x^3(1+x)-x^3}{1+x} = x^4 - x^3 + \frac{x^3}{1+x}$

$$= x^4 - x^3 + \frac{x^2(1+x)-x^2}{1+x} = x^4 - x^3 + x^2 - \frac{x^2}{1+x} = x^4 - x^3 + x^2 - \frac{x(1+x)-x}{1+x}$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{x}{1+x} = x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{x+1-1}{1+x} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$\therefore \int \frac{x^5}{1+x}dx = \int (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x})dx = \int (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)dx - \int \frac{1}{1+x}dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|1+x| + C.$$

★★★3、$\int \cos^5 x dx$

思路分析：经典思路----若被积函数为弦函数的奇数次幂，则取其一次凑微分，余下部分化为余函数的形式积分即可。

解：$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x d(\sin x) = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$$=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x)=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

★★★4、$\int\sin^4 xdx$

思路分析：经典思路----若被积函数为弦函数的偶数次幂，则将被积函数降幂，然后分项积分即可。

解：$\because \sin^4 x=(\frac{1-\cos 2x}{2})^2=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x;$$

$$\therefore\int\sin^4 xdx=\int(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x)dx=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

★★★5、$\int e^x\sin 2xdx$

思路分析：经典思路----大凡被积函数表现为反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数等五大类基本初等函数中的某两类的乘积的形式，则使用分部积分法求解！且按照“反、对、幂、三、指”的顺序，顺序排后者优先纳入到微分号下凑微分。其中“反、对、幂、三、指”依次代表“反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数”五类函数。

解：$\because\int e^x\sin 2xdx=\int\sin 2xde^x=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2xdx=e^x\sin 2x-2\int\cos 2xde^x$

$$=e^x\sin 2x-2e^x\cos 2x-4\int e^x\sin 2xdx$$

$$\therefore\int e^x\sin 2xdx=\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)+C.$$

6、$\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

思路分析： 凑微分。

$$\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}d[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\frac{1}{2}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$$

解： $\int\frac{1}{x^2-1}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$ 。

7、$\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

思路分析： 凑微分。

$$d(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))=\frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})dx=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

解： $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})+C$

注：第一类换元法 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x))+C$，6、7 小题均为中间变量较复杂的情形，这需要大家对第 3 章求导数过程比较熟悉，请大家好好体会！

8、$\int \frac{1-\ln x}{(x+\ln x)^2}dx$

解：　方法一：凑微分。注意到被积函数中有 $1-\ln x$，而 $d\frac{\ln x}{x} = \frac{1-\ln x}{x^2}dx$，这同样需要大家对经常出现的求导过程比较熟悉。

$$\int \frac{1-\ln x}{(x+\ln x)^2}dx = \int \frac{1-\ln x}{x^2(1+\frac{\ln x}{x})^2}dx = \int \frac{1}{(1+\frac{\ln x}{x})^2}d\frac{\ln x}{x} = \int \frac{1}{(1+\frac{\ln x}{x})^2}d\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{1+\frac{\ln x}{x}}+C = -\frac{x}{x+\ln x}+C.$$

方法二：分部积分法。先分项，再用分部积分法，注意到 $d(x+\ln x) = (1+\frac{1}{x})dx$。

$$\int \frac{1-\ln x}{(x+\ln x)^2}dx = \int \frac{-x-\ln x+x+1}{(x+\ln x)^2}dx = -\int \frac{1}{x+\ln x}dx + \int \frac{x+1}{(x+\ln x)^2}dx$$

$$= -\int \frac{1}{x+\ln x}dx + \int x\frac{1+\frac{1}{x}}{(x+\ln x)^2}dx = -\int \frac{1}{x+\ln x}dx + \int x\frac{1}{(x+\ln x)^2}d(x+\ln x)$$

$$= -\int \frac{1}{x+\ln x}dx - \int xd\frac{1}{x+\ln x} = -\int \frac{1}{x+\ln x}dx - \frac{x}{x+\ln x} + \int \frac{1}{x+\ln x}dx = -\frac{x}{x+\ln x}+C$$

9、$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx \quad (0<x<\frac{\pi}{4})$

思路：凑微分。三角函数 $1-\sin 2x = \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x = (\cos x-\sin x)^2$，且 $d(\cos x-\sin x) = -(\sin x+\cos x)dx$。

解：

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-2\sin 2x}}dx = \int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}}dx = -\int \frac{d(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x} = -\ln(\cos x-\sin x)+C$$

10、设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)dx.$（2000 年数学二、三）

思路：先求出 $f(x)$，再根据分部积分法计算。

解： 令 $t=\ln x$，则 $x=e^{t}$, 带入原式得： $f(t)=e^{-t}\ln(1+e^{t})$，故 $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$

$$\therefore \int f(x)dx=\int e^{-x}\ln(1+e^{x})dx=\int \ln(1+e^{x})d(-e^{-x})$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^{x})-\int(-e^{-x})\cdot\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\int\frac{1}{1+e^{x}}dx$$

$=-e^{-x}\ln(1+e^{x})-\ln(e^{-x}+1)+C$ 具体求解过程见习题 4-3，1（24）。

11、$\int x^{3}e^{x^{2}}dx$ （94 年数学二）

思路： 分部积分法。$xe^{x^{2}}dx=\frac{1}{2}de^{x^{2}}$ 。

解： $\int x^{3}e^{x^{2}}dx=\int x^{2}xe^{x^{2}}dx=\frac{1}{2}\int x^{2}e^{x^{2}}dx^{2}=\frac{1}{2}\int x^{2}de^{x^{2}}$

$$=\frac{1}{2}x^{2}e^{x^{2}}-\frac{1}{2}\int e^{x^{2}}\cdot 2xdx=\frac{1}{2}x^{2}e^{x^{2}}-\frac{1}{2}\int e^{x^{2}}dx^{2}=\frac{1}{2}x^{2}e^{x^{2}}-\frac{1}{2}e^{x^{2}}+C$$

12、$\int\frac{\ln\sin x}{\sin^{2}x}dx$ （98 年数学二）

思路： 分部积分法。

解： $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^{2}x}dx=\int\ln\sin xd(-\cot x)=-\cot x\ln\sin x-\int-\cot x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int\cot^{2}xdx=-\cot x\ln\sin x+\int(\csc^{2}x-1)dx$$

$$=-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+C$$

13、已知 $f'(\sin^{2}x)=\cos 2x+\tan^{2}x, 0<x<\frac{\pi}{2}$，求 $f(x)$ 。

思路：先求 $f'(x)$，再积分求 $f(x)$ 。

解：

$$\because f'(\sin^{2}x)=\cos 2x+\tan^{2}x=\cos^{2}x-\sin^{2}x+\frac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}=1-2\sin^{2}x+\frac{\sin^{2}x}{1-\sin^{2}x}$$

$$\therefore f'(x)=1-2x+\frac{x}{1-x}=1-2x-\frac{1-x-1}{1-x}=-2x+\frac{1}{1-x}(0<x<1)$$

$$\therefore f(x)=\int(-2x+\frac{1}{1-x})dx=-x^{2}-\ln(1-x)+C$$ 。

13、$\int\frac{\arctan e^{x}}{e^{2x}}dx$ （01 年数学一）

思路：综合题。

解：$\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \arctan e^x de^{-2x} = -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x}}\cdot\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}}\right)de^x = -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\arctan e^x + C$$

14、设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M \Leftrightarrow N$"是指 M 的充要条件是 N，则下列说法正确的是 ___________。（05 年数学二）

（A ）$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数；（B） $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数；

（C）$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数；

（D）$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数；

思路：$\int f(x)dx = F(x) + C$，用排除法。

解：对（B） 令 $f(x) = x^2$，则 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$ 为其一个原函数，但 $F(x)$ 非奇非偶。

（C） 令 $f(x) = |\sin x|$，其周期为 π，$F(x) = \begin{cases} -\cos x + 1, \sin x > 0 \\ \cos x + 1. \sin x < 0 \end{cases}$ 不是周期函数。

（D）令 $f(x) = 2x$，单增函数。但 $F(x) = x^2$ 不是单调函数。

故答案为 A。